Índice

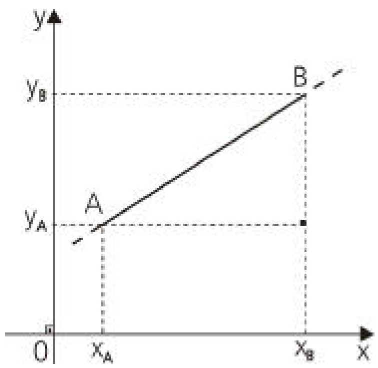
Geometria Analítica

Resumo Teórico 1
Exercícios 4
Dicas 5
Resoluções 6

Geometria Analítica

Resumo Teórico

Distância entre 2 Pontos

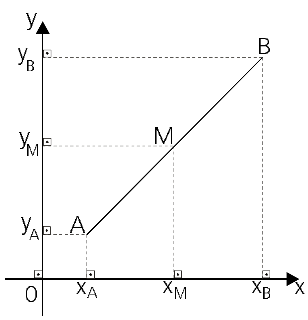


$$d_{A,B} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

ou

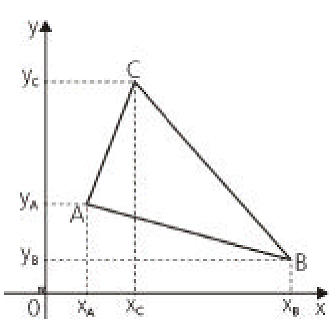
$$d_{A,B} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$$

Ponto Médio de um Segmento



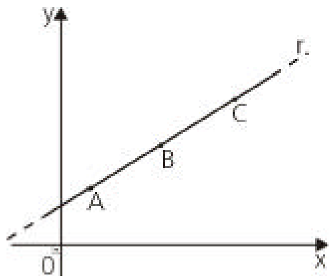
$$M\left(\frac{X_A + X_B}{2}; \frac{Y_A + Y_B}{2}\right)$$

Área do Triângulo



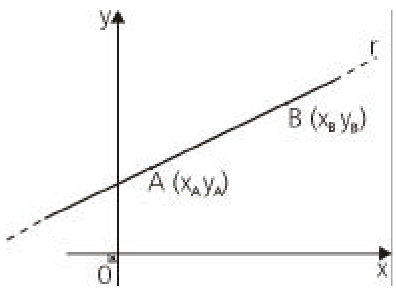
$$S_\Delta = \left|\frac{D}{2}\right| \text{ onde } D = \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Alinhamento de 3 Pontos



$$C \in \overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Equação Geral da Reta (por 2 Pontos)



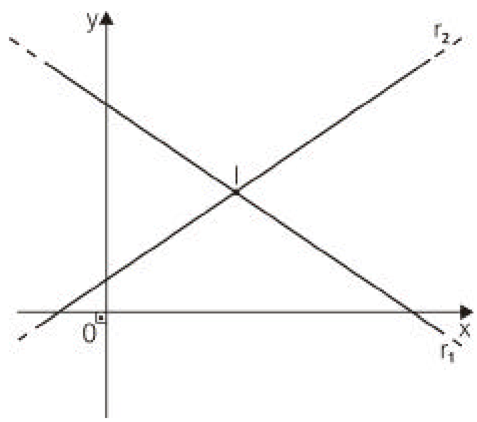
P(X,Y) é um ponto qualquer de r

$$\begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X & Y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{ax + by + c = 0}$$

$a \in IR,\ b \in IR$ e $c \in IR$

$a.b \neq 0$

Intersecção de Retas



$$S = \begin{cases} (r_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ (r_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$I\,(x_1, x_2) \in r_1$ e $I\,(x_1, x_2) \in r_2 \Leftrightarrow I\,(x_1, x_2)$ é solução de S

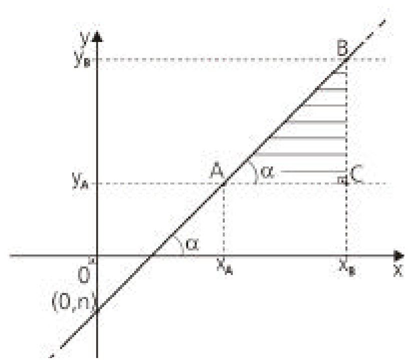
Obs.: 1. Se **S** é determinado, r_1 e r_2 são concorrentes.

2. Se **S** é impossível, r_1 e r_2 são paralelas distintas.

3. Se **S** é indeterminado, r_1 e r_2 são coincidentes.

Equação da Reta na Forma Reduzida

$$\underbrace{\overline{ax + by + c = 0}}_{\text{(geral)}} \Rightarrow y = \frac{-a}{b}x \frac{-c}{b} \Rightarrow \underbrace{\overline{y = mx + n}}_{\text{(reduzida)}}$$



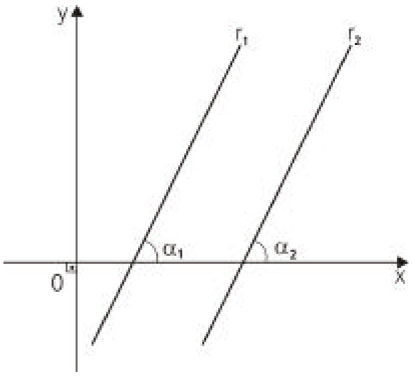
$$m = \frac{-a}{b} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = tg\alpha$$

α = inclinação da reta.

$m = tg\alpha$: declividade (coef. angular)

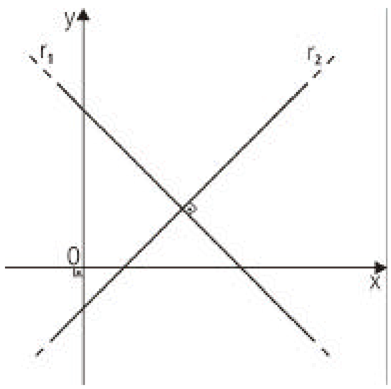
n: coef. linear

Paralelismo



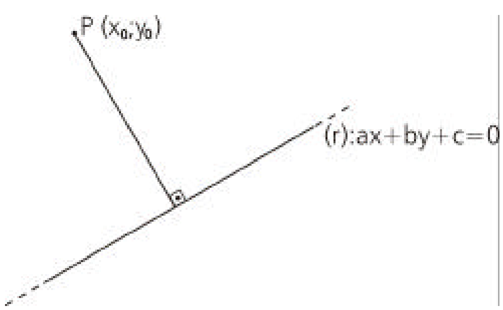
$$\overline{r_1 \; // \; r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2}$$

Perpendicularismo



$$\overline{r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 = \frac{-1}{m_2}}$$

Distância de Ponto à Reta



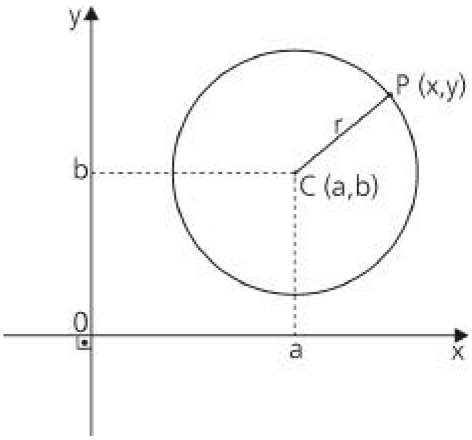
$$d_{p,r} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Obs.: **distância entre 2 retas paralelas**

$ax + by + k_1 = 0$ e $ax + by + k_2 = 0$

$$d_{r_1, r_2} = \left| \frac{k_1 - k_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Equação da Circunferência



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{(reduzida)}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad \text{(normal)}$$

$$c = a^2 + b^2 - r^2$$

Exercícios

01. Considere o triângulo ABC, onde A = (0, 4), B = (2, 3) e C é um ponto qualquer da circunferência $x^2 + y^2 = 5$. A abscissa do ponto C que torna a área do triângulo ABC a menor possível é:

a. -1 b. $-\frac{3}{4}$ c. 1 d. $\frac{3}{4}$ e.2

02. Sejam A = (1, 2) e B = (3, 2) dois pontos do plano cartesiano. Nesse plano, o segmento AC é obtido do segmento AB por uma rotação de 60º, no sentido anti–horário, em torno do ponto A. As coordenadas do ponto C são:

a. $(2,2+\sqrt{3})$ b. $\left(1+\sqrt{3},\frac{5}{2}\right)$ c. $(2,1+\sqrt{3})$ d. $(2,2-\sqrt{3})$ e. $(1+\sqrt{3},2+\sqrt{3}))$

03. Uma circunferência de raio 2, localizada no primeiro quadrante, tangencia o eixo x e a reta de equação $4x - 3y = 0$. Então a abscissa do centro dessa circunferência é:

a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. 5

04. A reta s passa pelo ponto (0, 3) e é perpendicular à reta AB onde A = (0, 0) e B é o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$. Então a equação de s é

a. $x - 2y = -6$ b. $x + 2y = 6$ c. $x + y = 3$ d. $y - x = 3$ e. $2x + y = 6$

05. Seja **A** a intersecção das retas <u>r</u>, de equação $y = 2x$ e s, de equação $y = 4x - 2$. Se **B** e **C** são intersecções respectivas dessas retas com o eixo das abscissas, a área do triângulo ABC é:

a. $\frac{1}{2}$ b. 1 c. 2 d. 3 e. 4

06. Sabendo que o ponto (2, 1) é ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, então a equação da reta que contém A e B é dada por:

a. $y = 2x - 3$ b. $y = x - 1$ c. $y = -x + 3$ d. $y = \frac{3}{2}x - 2$ e. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

07. Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com $b > 0$, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por

a. (– b, – b) b. (2b, – b) c. (4b, – 2b) d. (3b, – 2b) e. (2b, – 2b)

Dicas

01.

1. Uma circunferência de centro (α, β) e raio r tem por equação: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$
2. A área do ΔABC será menor quanto mais próximo C estiver da reta AB.

   O coeficiente angular **m** de uma reta que passa por (x_A, y_A) e (x_B, y_B) é dado por $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
3. Reta que passa por um ponto (x_0, y_0) tem equação $y - y_0 = m(x - x_0)$.
4. Se duas retas r e s são perpendiculares, o produto de seus coeficientes angulares é – 1.

02.

1. Faça um gráfico, marcando os pontos A e B.
2. Na rotação, um segmento não muda de comprimento. Veja onde vai parar o segmento AB.
3. Se um triângulo isósceles tem um ângulo de 60º, ele é equilátero.
4. A altura h de um triângulo equilátero de lado ℓ é $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

03. Se uma reta de equação $ax + by + c = 0$ tangencia uma circunferência, a distância do centro (α, β) a ela é igual ao raio, isto é:

$$\left| \frac{a\alpha + b\beta + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = r$$

Equação modular da forma $|m| = k$, k é real positivo, tem como soluções: $m = k$ e $m = -k$.

04. Circunferência de equação $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ tem centro $B = (\alpha, \beta)$.

Uma reta r que passe por (x_A, y_A) e por (x_B, y_B) tem coeficiente angular m_r dado por: $m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Se duas retas são perpendiculares, então: $m_r \cdot m_s = -1$

Reta que passa por (x_o, y_o) tem equação: $y - y_o = m(x - x_o)$

05. O ponto de intersecção de duas retas tem suas coordenadas obtidas na resolução do sistema formado com as equações das duas retas.

Área de triângulo de vértices (x_A, y_A), (x_B, y_B) e (x_C, y_C)

$$s = \frac{1}{2}\,|\,D\,|\ \text{onde}\ D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

06.

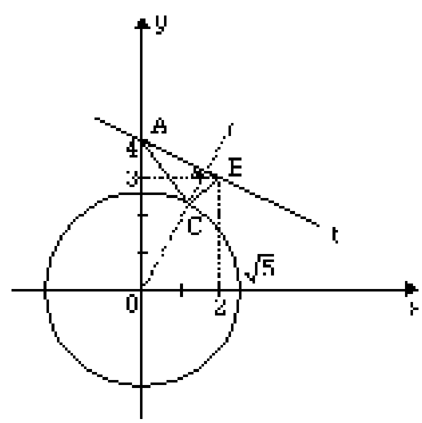
1. Circunferência de equação $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ tem centro $Q = (\alpha, \beta)$ e raio r.
2. Construa um gráfico para melhor visualizar o problema.
3. Numa circunferência, o segmento que une o centro ao ponto médio de uma corda é perpendicular a essa corda.
4. O coeficiente angular da reta que passa por (x_A, y_A) e (x_B, y_B) é $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ $(x_B \neq x_A)$
5. Se AB e CD são perpendiculares, então $m_{AB} \,.\, m_{CD} = -1$.
6. Reta que passa por (x_0, y_0) e não é perpendicular ao eixo das abscissas, tem equação: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, sendo m o seu coeficiente angular.

07.

1. Faça um esboço gráfico da situação dada.
2. Num retângulo, as diagonais se cruzam no meio de cada uma delas.
3. Se M é ponto médio do segmento AB, com $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, então:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Resoluções



01. Alternativa c.

A circunferência $x^2 + y^2 = 5$ tem centro 0 (0,0) e raio $\sqrt{5}$.

Sendo t a reta AB, tracemos, por 0, a reta $r \perp t$, determinando o ponto C na circunferência.

O ponto C é o ponto da circunferência que está mais próximo de AB e, porisso, é o que torna a área do ΔABC a menor possível.

Se $r \perp t$, $m_r \,.\, m_t = -1$ (coeficientes angulares)

ou $m_r \cdot \dfrac{3-4}{2-0} = -1$, isto é, $m_r = 2$.

Assim, r, que passa por (0,0), tem equação:

$y - 0 = 2(x - 0)$ ou $y = 2x$.

A abscissa de C é obtida calculando o valor de x no sistema $\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ uma vez que C é a intersecção entre r e a circunferência.

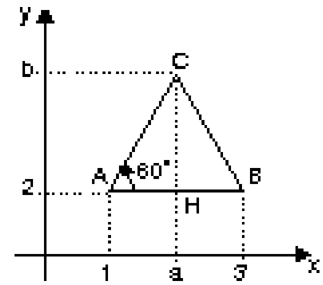
$x^2 + (2x)^2 = 5$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Como C está no 1.o quadrante, sua abscissa é $x = 1$.

02. Alternativa a.



Representemos graficamente o segmento AB e o segmento AC obtido após a rotação. (Note que, como é **em torno** de A, A não muda de lugar).

Seja $C = (a,b)$.

Unamos C com B.

Inicialmente, sabemos que o ΔABC é isósceles ($AB = AC$).

Como $\hat{A}$ mede 60º e $\hat{B}$ e $\hat{C}$ têm medidas iguais (são os ângulos da base de um triângulo isósceles), concluímos que $\hat{B}$ e $\hat{C}$ também medem 60º.

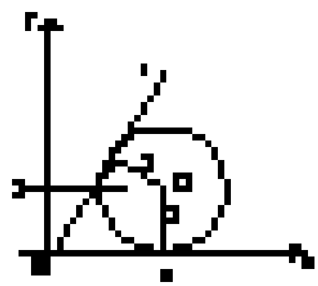
Então, o ΔABC é eqüilátero de lado 2.

CH é altura e mediana desse triângulo.

Assim, $a = 2$ e $CH = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Portanto, $b = 2 + CH = 2 + \sqrt{3}$ e o ponto C é $C = (2, 2 + \sqrt{3})$

03. Alternativa d.



Seja $Q = (a , b)$ o centro da circunferência dada, com a e b positivos (1.o quadrante).

Como ela tangencia o eixo x e o raio é 2, temos: $b = 2$.

Se a reta r, de equação $4x - 3y = 0$, é tangente à circunferência, a distância de Q a r é igual ao raio 2.

$$\left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = 2 \quad \text{ou} \quad \left| \frac{4 \cdot a - 3 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \right| = 2$$

A equação $\left| \dfrac{4 \cdot a - 6}{5} \right| = 2$ tem como incógnita a abscissa **a** procurada.

I. $\dfrac{4a - 6}{5} = 2 \Rightarrow 4a - 6 = 10 \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4$

II. $\dfrac{4a - 6}{5} = -2 \Rightarrow 4a - 6 = -10 \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1$

Esta última raiz $a = -1$ não convém, uma vez que a circunferência está no primeiro quadrante ($a > 0$).

Então, a abscissa do centro é 4.

04. Alternativa b.

Sendo $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$ a equação da circunferência, temos:

$$\underbrace{x^2 - 2x + \boxed{1}}_{(x-1)^2} + \underbrace{y^2 - 4y + \boxed{4}}_{(y-2)^2} = \underbrace{20 + \boxed{1} + \boxed{4}}_{25} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

O centro da circunferência é $B = (1, 2)$

Se a reta s é perpendicular a AB, seu coeficiente angular m_s é tal que:

$$m_s \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_s \cdot \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1 \Rightarrow m_S \cdot \frac{2-0}{1-0} = -1 \Rightarrow m_S = -\frac{1}{2}$$

Como s passa por $P = (0, 3)$, sua equação é: $y - y_p = m(x - x_p)$ isto é, $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 0)$

ou $2y - 6 = -x$, ou ainda, $x + 2y = 6$

05. Alternativa a.

I. A é a intersecção de r com s. $\begin{cases} y = 2x \\ y = 4x - 2 \end{cases}$

Igualando as duas equações:

$4x - 2 = 2x \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 = x_A$

$y = 2x = 2 = y_A \Rightarrow A = (1,2)$

II. B é a intersecção de r com 0x

$y = 2x$

$y = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B = (0,0)$

III. C é a intersecção de s com 0x

$y = 4x - 2$

$y = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

IV. Seja o determinante $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(0-1) = 1$

2.a linha

A área do ΔABC é: $S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

06. Alternativa c.

Seja a circunferência cuja equação é $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$

Seu centro é $Q = (1, 0)$ e seu raio é $r = 2$.

Sendo $M = (2, 1)$ o ponto médio da corda AB, QM tem coeficiente angular

$$M_{QM} = \frac{y_m - y_Q}{x_m - y_Q} = \frac{1-0}{2-1} = 1$$

A reta AB é perpendicular a QM. Então: $m_{AB} \cdot m_{QM} = -1 \Rightarrow m_{AB} = -1$

Como a reta AB passa por M = (2, 1), sua equação é: $y - 1 = -1(x - 2)$ ou $y = -x + 3$

Um outro modo de resolver a questão:

A reta AB passa por M = (2, 1), sua equação é: $y - 1 = m(x - 2)$ ou $mx - y + (1 - 2m) = 0$

A circunferência tem equação $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$ e, portanto, tem centro Q = (1, 0) e raio r = 2

A distância de Q a M é $d = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

d é também a distância entre o centro Q e a reta AB.

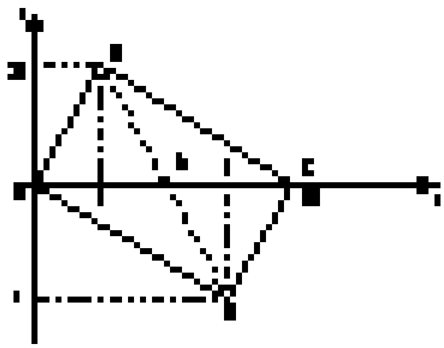
Assim, $d = \left| \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ $\left(\begin{array}{l}\text{Distância de } (x_0, y_0) \\ \text{à reta } ax + by + c = 0\end{array}\right)$ $d = \left| \dfrac{m \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 - 2m}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \right| = \sqrt{2}$

ou $\dfrac{(1-m)^2}{m^2 + 1} = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow 1 - 2m + m^2 = 2m^2 + 2 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m + 1)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$

A equação da reta AB fica $(-1)x - y + 1 - 2(-1) = 0$, isto é, $y = -x + 3$

07. Alternativa *c*.



Representemos, no plano cartesiano, o retângulo ABCD em que A = (0, 0), B = (b, 2b) e C = (5b, 0), b > 0, e seja D = (d, e) o vértice procurado.

Tracemos a diagonal BD.

M é o ponto médio de AC.

Então: $M = \left(\dfrac{5b + 0}{2}, \dfrac{0 + 0}{2}\right) = \left(\dfrac{5b}{2}, 0\right)$

Mas, M é também ponto médio de BD.

Assim, $M = \left(\dfrac{b + d}{2}, \dfrac{2b + e}{2}\right)$

Concluímos, então, que: $\dfrac{5b}{2} = \dfrac{b + d}{2} \Rightarrow d = 4b$ e que $0 = \dfrac{2b + e}{2} \Rightarrow 2b + e = 0 \Rightarrow e = -2b$

Portanto, D = (4b, – 2b)