

Índice

Números Complexos, Polinômios e Equações Algébricas

Resumo Teórico	1
Exercícios.....	7
Dicas	8
Resoluções	9



Números Complexos, Polinômios e Equações Algébricas

Resumo Teórico

Forma Algébrica do Número Complexo

- $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$a = \text{Re}(z)$ = parte real do número complexo.

$b = \text{Im}(z)$ = coeficiente da parte imaginária de z .

i = unidade imaginária.

- potências de i

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$(K \in \mathbb{Z}) \rightarrow \begin{cases} i^{4K} = 1 \\ i^{4K+1} = i \\ i^{4K+2} = -1 \\ i^{4K+3} = -i \end{cases}$$

- produtos e divisões notáveis

$$(1 + i)^2 = 2i$$

$$(1 - i)^2 = -2i$$

$$(1 + i)(1 - i) = 2$$

$$\frac{1+i}{1-i} = i \Rightarrow \frac{1-i}{1+i} = -i$$

- conjugado de z (\bar{z})

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

propriedades:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0)$$

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

- módulo de $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{[\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2}$$

propriedades:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

$$|z| \in \mathbb{R}_+ \text{ (número real não negativo)}$$

Forma Trigonométrica do Número Complexo ($z \neq 0$)

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$\theta + k \cdot 2\pi = \text{argumento de } z = \arg(z)$$

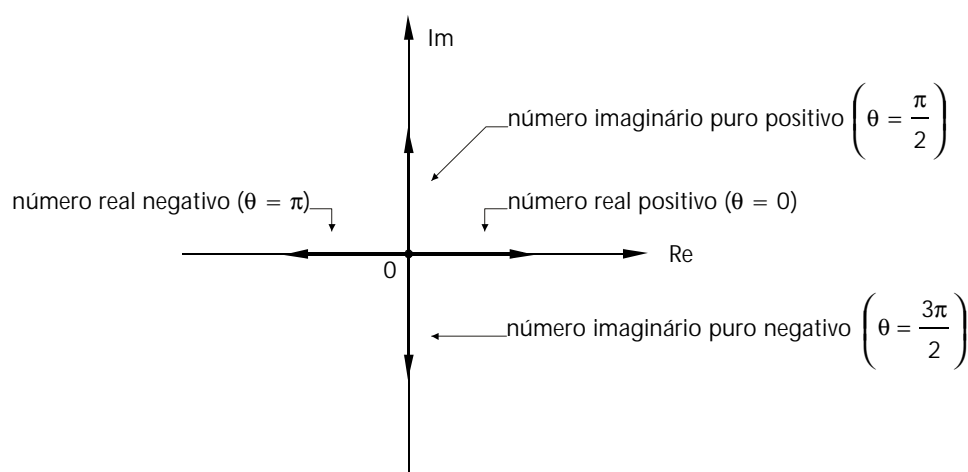
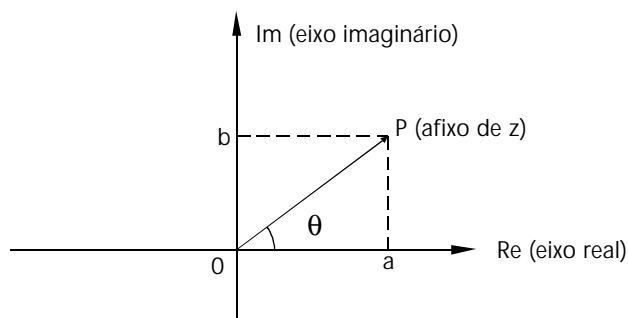
$$\theta (0 \leq \theta < 2\pi) = \text{argumento principal de } z.$$

$$z = a + bi$$

$$|z| = \operatorname{dop} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{|z|}$$



Dados: $z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$

$$w = |z| (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha).$$

- $z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\theta + \alpha) + i \operatorname{sen}(\theta + \alpha)]$
- $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\theta - \alpha) + i \operatorname{sen}(\theta - \alpha)]$
- $z^m = |z|^m \cdot [\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta)] \quad (m \in \mathbb{Z})$
- $\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right]$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n - 1)$$

Importante:

$$z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0 \text{ (sempre)}$$

raiz enésima de z divide a circunferência em n partes iguais.

raio dessa circunferência é $\sqrt[n]{|z|}$

o ponto de partida (z_0) é o arco $\frac{\theta}{n}$ e o "pulo" de uma raiz para outra é de $\frac{2\pi}{n}$.

Exemplo: raízes sextas de $-64 \Rightarrow z = 64 (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

$$\sqrt[6]{-64} = z_k \quad \Rightarrow \quad z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i$$

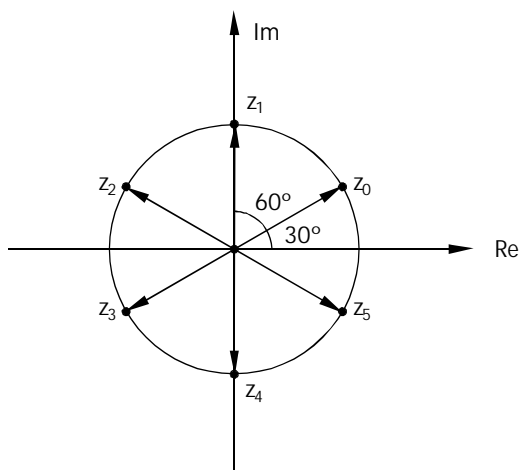
$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = 2i$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = -z_0 = -\sqrt{3} - i$$

$$z_4 = -z_1 = -2i$$

$$z_5 = -z_2 = \sqrt{3} - i$$



- equação binômica em \mathbb{C}

$$ax^n + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$ax^n = -b \Rightarrow x^n = \frac{-b}{a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}} = z_k$$

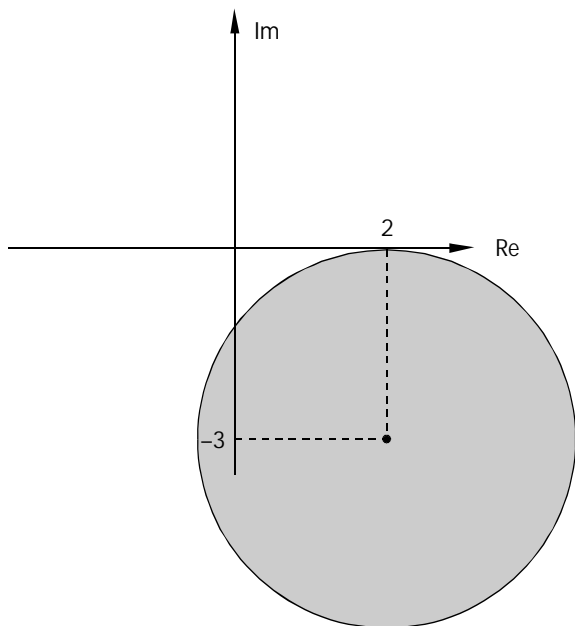
$$(k = 0, 1, 2, \dots, n - 1)$$

- lugares geométricos no plano complexo

$$|z - 2 + 3i| \leq 3 \text{ seja: } z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$|x + yi - 2 + 3i| \leq 3 \Leftrightarrow \left| \overbrace{(x-2)}^{\operatorname{Re}} + \overbrace{(y+3)}^{\operatorname{Im}} \right| \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} \leq 3$$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 9$ que é a equação de um **círculo** com centro $(2, -3)$ e raio $= 3$.



Polinômios e Equações Algébricas

- Polinômio nulo (**não se define grau**)

$$P(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x^1 + 0x^0$$

$$P(x) = 0 \text{ ou } P(x) \equiv 0$$

- Igualdade (identidade de polinômios)

$$A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

$$B(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n$$

$A(x) = B(x)$ ou $A(x) \equiv B(x)$	\Leftrightarrow	$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n.$ $A(\alpha) = B(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
---	-------------------	--

- Sejam $A(x)$ e $B(x)$ com graus α e β , respectivamente:

a. $A(x) \cdot B(x)$ tem grau $\alpha + \beta$

b. $[A(x)]^n$ tem grau $n \cdot \alpha$

c. $A(x) \overline{) B(x)} \quad Q(x)$ tem grau $\alpha - \beta$ se $\alpha \geq \beta$.

$R(x)$ $Q(x)$ $\text{gr}(R) < \beta$ ou não se define $\text{gr}(R)$ quando a divisão for exata ($R(x) \equiv 0$).

d. $A(x) + B(x)$ ou $A(x) - B(x)$ tem grau: α se $\alpha > \beta$
 β se $\beta > \alpha$

Cuidado! Se $\alpha = \beta = m \in \mathbb{N}$ então $\text{gr}(A \pm B) \leq m$ ($0, 1, 2, 3, \dots, m$) ou não se define $\text{gr}(A \pm B)$ quando $A(x) \pm B(x) \equiv 0$

- Divisão de polinômios:

$P(x) \overline{) d(x) \neq 0} \quad 1. P(x) \equiv Q(x) \cdot d(x) + R(x)$

$R(x) \quad Q(x) \quad 2. \text{gr}(R) < \text{gr}(d) \text{ ou } R(x) \equiv 0.$

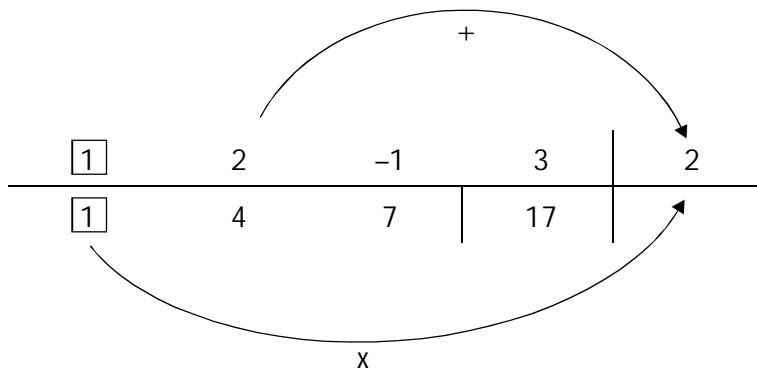
- Teorema do resto

$$P(x) \begin{array}{l} | \\ x - a \\ \hline \end{array} \\ r = P(a) \quad Q(x)$$

- Raiz \Leftrightarrow fatoração de $P(x)$

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(x) \begin{array}{l} | \\ x - \alpha \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$$

- Dispositivo de Briot-Ruffini



$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 1x + 3$$

$$d(x) = x - 2$$

$$Q(x) = x^2 + 4x + 7$$

$$R(x) = r = 17$$

- Se α_1 e α_2 são raízes de $P(x)$, temos:

$$P(x) \begin{array}{l} | \\ (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad P(x) \begin{array}{l} | \\ x - \alpha_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} | \\ x - \alpha_2 \\ \hline \end{array} \\ 0 \quad Q(x) \quad \quad \quad 0 \quad Q_1(x) \quad Q_2(x) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot Q(x) \quad P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot Q_2(x)$$

- Se α é raiz tripla (por exemplo) de $P(x)$ temos:

$$P(x) \begin{array}{l} | \\ (x - \alpha)^3 \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad P(x) \begin{array}{l} | \\ x - \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} | \\ x - \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} | \\ x - \alpha \\ \hline \end{array} \\ 0 \quad Q(x) \quad \quad \quad 0 \quad Q_1(x) \quad Q_2(x) \quad Q_3(x) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$P(x) = (x - \alpha)^3 \cdot Q(x) \quad P(x) = (x - \alpha)^3 \cdot Q_3(x)$$

$$\text{e } Q(\alpha) \neq 0$$

$$\text{e } Q_3(\alpha) \neq 0$$

na prática, temos:

$P(x)$			α	$(x - \alpha)$
$Q_1(x)$		0	α	$(x - \alpha)$
$Q_2(x)$		0	α	$(x - \alpha)$
$Q_3(x)$	0			

- Num polinômio **de coeficientes reais**

Se $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$) é raiz então $\bar{\alpha} = a - bi$ (conjugado) também é raiz e ambas com mesma multiplicidade.

- **Relações de Girard** para uma equação de 4.o grau (por exemplo)

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

$P(x) \rightarrow$ de raízes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$(1.a) \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{-a_1}{a_0}$$

$$(2.a) \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$(3.a) \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{-a_3}{a_0}$$

$$(4.a) \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{a_4}{a_0}$$

- Dada a equação **de coeficientes inteiros**

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

se o número racional $\frac{p}{q}$ for raiz dela então **p é divisor de a_n** e **q é divisor de a_0** .

Exercícios

01. Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x - 3$. Dividindo $p(x)$ por $x - 1$ obtemos quociente $q(x)$ e o resto $r = 10$.

O resto da divisão de $q(x)$ por $x - 3$ é:

- a. - 5
- b. - 3
- c. 0
- d. 3
- e. 5

02. Seja $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as quatro raízes de $p(x)$ são inteiras e que três delas são pares e uma é ímpar. Quantos coeficientes pares tem o polinômio $p(x)$?

- a. 0
- b. 1
- c. 2
- d. 3
- e. 4

03. O número de raízes complexas, que não são reais, do polinômio

$p(x) = x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n+1}$ ($n > 1$) é:

- a. $2n + 1$
- b. $2n$
- c. $n + 1$
- d. n
- e. 1

04. Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$ qual é o menor valor do inteiro $n \geq 1$ para o qual z^n é um número real?

- a. 2
- b. 4
- c. 6
- d. 8
- e. 10

05. Sabendo que α é um número real e que a parte imaginária do número complexo $\frac{2+i}{\alpha+2i}$ é zero,

então α é:

- a. - 4
- b. - 2
- c. 1
- d. 2
- e. 4

06. Sabe-se que o produto de duas raízes da equação algébrica $2x^3 - x^2 + kx + 4 = 0$ é igual a 1. Então o valor de k é:

- a. - 8
- b. - 4
- c. 0
- d. 4
- e. 8

07. As três raízes de $9x^3 - 31x - 10 = 0$ são p , q e 2. O valor de $p^2 + q^2$ é

- a. $\frac{5}{9}$
- b. $\frac{10}{9}$
- c. $\frac{20}{9}$
- d. $\frac{26}{9}$
- e. $\frac{31}{9}$

Dicas

01. Da divisão de polinômios é importante lembrar:

1. Definição:

$$\begin{array}{l} P(x) \\ R(x) \end{array} \begin{array}{l} \underline{d(x)} \\ Q(x) \end{array} \Rightarrow P(x) \equiv Q(x) \cdot d(x) + R(x)$$

Obs.: \equiv (identidade) é uma igualdade verdadeira para qualquer valor atribuído a x .

2. Teorema do resto

$r = P(a)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por $d(x) = x - a$.

3. Teorema de D'Alembert

é um caso particular do teorema do resto quando a divisão é exata (resto = zero).

$$\begin{array}{l} P(x) \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} \underline{x - a} \\ Q(x) \end{array} \Rightarrow P(a) = a$$

02. Chame as raízes de $p(x)$ de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (números pares) e α_4 (número ímpar) e, a seguir, aplique as relações de Girard para uma equação do 4.o grau:

$$1. \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{-a_1}{a_0}$$

$$2. \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$3. \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{-a_3}{a_0}$$

$$4. \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{a_4}{a_0}$$

03. Fatore o polinômio $p(x)$, colocando-o na forma $p(x) = x \cdot Q(x)$ e determine as eventuais raízes de $Q(x)$.

04. Passe z para a forma trigonométrica e aplique a 1.a fórmula de Moivre.

Lembre-se:

1. $z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \Rightarrow z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ – (1.a fórmula de Moivre)
2. z^n é real $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z^n) = 0$, isto é, $\operatorname{sen} n\theta = 0$

05. Realize (torne real) o denominador do número $z = \frac{2+i}{\alpha+2i}$ multiplicando os termos dessa fração pelo conjugado do denominador e escreva z na forma $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Lembre-se: fração = 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{numerador} = 0 \\ \text{denominador} \neq 0 \end{cases}$

06. Use a 3.a relação de Girard para essa equação de raízes a, b, c tais que $a \cdot b = 1$.

Lembre-se:

1. $abc = \frac{-a_3}{a_0}$ (Girard)
2. Substituindo x por c na equação original obtemos uma igualdade verdadeira e, então, é possível achar o valor de k .

07.

1. Aplique a (1.a) e a (2.a) relações de Girard à equação dada:

$$(1.a) \quad a + b + c = \frac{-a_1}{a_0}$$

$$(2.a) \quad ab + ac + bc = \frac{a_2}{a_0}$$

2. Lembre-se: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

Resoluções

01. Alternativa a.

Do enunciado, temos:

$$x - 3 \mid p(x) \Rightarrow \begin{array}{l} p(x) \quad \overline{) x - 3} \\ r' = 0 \quad q'(x) \end{array} \Rightarrow p(3) = 0 \quad (1)$$

e, também:

$$\begin{array}{l} p(x) \quad \overline{) x - 1} \\ r = 10 \quad q(x) \end{array} \Rightarrow p(x) \equiv q(x) \cdot (x - 1) + 10 \quad (2)$$

fazendo $x = 3$ na identidade (2), temos: $p(3) = q(3) \cdot (3 - 1) + 10$

$$\text{de (1) obtemos: } 0 = q(3) \cdot 2 + 10 \Rightarrow q(3) = -\frac{10}{2} = -5 \quad (3)$$

na divisão $\begin{array}{l} q(x) \quad \overline{) x - 3} \\ r'' \quad q''(x) \end{array}$ sabemos que $r'' = q(3) = -5$ (teorema do resto) (3)

02. Alternativa d.

Chamemos as quatro raízes de $p(x)$ de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$ e α_4 sendo α_4 um número ímpar e as demais, números pares.

Usando as relações de Girard para a equação:

$$p(x) = 1x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$\begin{matrix} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix}$$

temos:

$$1. \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{-b}{1} = -b$$

$$2. \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{c}{1} = c$$

$$3. \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{-d}{1} = -d$$

$$4. \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{e}{1} = e$$

Sabemos, também, que:

Adição		multiplicação	
(ímpar) + (ímpar)	= (par)	(ímpar) . (Ímpar)	= (ímpar)
(ímpar) + (par)	= (ímpar)	(ímpar) . (Par)	= (par)
(par) + (ímpar)	= (ímpar)	(par) . (Ímpar)	= (par)
(par) + (par)	= (par)	(par) . (Par)	= (par)

A seguir, analisando as quatro relações de Girard, concluímos:

1. par + par + par + ímpar = ímpar = - b e, analogamente,
2. soma de pares = par = c
3. soma de pares = par = - d
4. par = e

Portanto **c**, **d** e **e** são coeficientes pares e os outros dois (**1** e **b**) são ímpares.

03. Alternativa b.

O polinômio $p(x) = x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n+1}$ ($n > 1$) tem $2n + 1$ raízes e admite a colocação do fator comum x em evidência. Portanto:

$$p(x) = x \left(\overbrace{1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}}^{Q(x)} \right) \text{ ou seja } p(x) = (x - 0) \cdot Q(x)$$

Para todo $x \in \mathbf{R}$ elevado a expoentes pares, temos: $x^{\text{PAR}} \geq 0$ e, assim sendo,

$Q(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ que, por isso, não admite nenhuma raiz real (nunca se anula em \mathbf{R}).

Deste modo, concluímos que a única raiz real de $p(x)$ é **zero** e suas demais **2n** raízes são todas complexas não reais.

04. Alternativa c.

Para usar a 1.a fórmula de Moivre, passamos $z = \sqrt{3} + 1$ para a forma trigonométrica:

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$$

$$w = z^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} \right) \quad (n \geq 1)$$

W é real $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(w) = 0$, portanto:

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n = 6k \Rightarrow n \in \{ \dots, -12, -6, 0, 6, 12, \dots \}$$

Como $n \geq 1$ e n deve ser o menor inteiro possível, então: $n = 6$

05. Alternativa e.

Vamos deixar o número complexo $z = \frac{2+i}{\alpha+2i}$ na forma $z = a + bi$

$$z = \frac{2+i}{\alpha+2i} \cdot \frac{\alpha-2i}{\alpha-2i} = \frac{2\alpha-4i+\alpha i+2}{\alpha^2-4i^2} = \left(\frac{2\alpha+2}{\alpha^2+4} \right) + i \left(\frac{\alpha-4}{\alpha^2+4} \right) = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \quad \text{onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Como } \operatorname{Im}(z) = 0, \text{ temos } \frac{\alpha-4}{\alpha^2+4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-4 = 0 \text{ (numerador} = 0) \\ \alpha^2+4 \neq 0 \text{ (denominador} \neq 0) \end{cases}$$

Portanto $\alpha = 4$

06. Alternativa a.

Chamando de a, b, c as raízes da equação

$$2x^3 - 1x^2 + kx + 4 = 0 \quad (1)$$

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

$$\text{e escrevendo a 3.a relação de Girard, temos: } \begin{cases} abc = \frac{-a_3}{a_0} = -\frac{4}{2} = -2 \\ ab = 1 \text{ (produto de duas delas é igual a 1)} \end{cases}$$

Portanto, $abc = -2 \Rightarrow 1 \cdot c = -2 \Rightarrow c = -2$ é uma das raízes da equação e, por isso, torna a igualdade (1) verdadeira:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-2)^3 - 1 \cdot (-2)^2 + k \cdot (-2) + 4 &= 0 \\ -16 - 4 - 2k + 4 &= 0 \\ -2k &= 16 \\ k &= -8 \end{aligned}$$

07. Alternativa d.

Aplicamos a (1.a) e (2.a) relações de Girard à equação $9x^3 + 0x^2 - 31x - 10 = 0$ de raízes p, q e 2

$$(1.a) \quad p + q + 2 = \frac{-a_1}{a_0} = 0$$

$$(2.a) \quad pq + 2p + 2q = \frac{a_2}{a_0} = -\frac{31}{9}$$

da (1.a) $p + q = -2$ (1)

da (2.a) $pq + 2(p + q) = -\frac{31}{9} \Rightarrow pq + 2 \cdot (-2) = -\frac{31}{9} \Rightarrow pq = -\frac{31}{9} + 4 \Rightarrow pq = -\frac{5}{9}$ (2)

de (1) $p + q = -2 \Rightarrow (p + q)^2 = (-2)^2 \Rightarrow p^2 + 2pq + q^2 = 4 \Rightarrow p^2 + q^2 = 4 - 2pq$

de (2) $p^2 + q^2 = 4 - 2 \cdot \frac{5}{9} = 4 - \frac{10}{9} = \frac{26}{9}$

Outra resolução:

Se $\alpha = 2$ é raiz de $P(x)$ então $x - 2 \mid P(x)$ – divisão exata

$P(x) = (x - 2)(9x^2 + 18x + 5) = 0$

raiz

raízes p e q tais que:

$$\alpha = 2 \begin{cases} p + q = -\frac{18}{9} = -2 \\ p \cdot q = \frac{5}{9} \end{cases}$$

9	0	-31	-10	2
9	18	5	0	

e, procedendo analogamente às resoluções anteriores, obtemos: $p^2 + q^2 = \frac{26}{9}$