

Índice

Conjuntos, Funções e Inequações

Resumo Teórico	1
Exercícios.....	4
Dicas	5
Resoluções	6



Conjunto, Funções e Inequações

Resumo Teórico

Teoria dos Conjuntos

Consideremos dois conjuntos A e B.

Subconjunto

A está contido em B ($A \subset B$) se, e somente se, todo elemento de A é também elemento de B.

Ex.: $\{2,3\}$ está contido em $\{1,2,3,4\}$.

Operações

Reunião

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Pegar **todos** os elementos de A e todos os de B.

Intersecção

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Pegar só os elementos **comuns** a A e B.

Diferença

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Pegar os elementos de A **que não estão** em B.

Complementar

Se $A \subset B$, complementar de A em relação a B é o conjunto.

$$A^C = B - A = C_B^A$$

Conjunto das Partes

O conjunto das partes de $A = P(A)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de A (inclui sempre o vazio).

Se A tem n elementos, $P(A)$ tem 2^n elementos.

Exemplo:

$$A = \{2,3,4\}; \quad B = \{1,3,4,5\}; \quad S = \{0, 1, 2,3,4,5,6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2,3,4,5\} \quad A \cap B = \{3,4\} \quad A - B = \{2\} \quad C_S^A = \{0,1,5,6\}$$

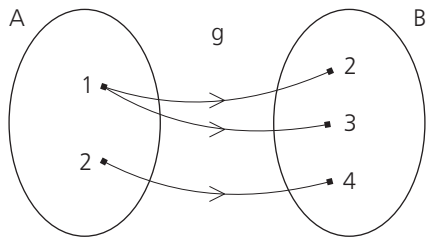
$$P(A) = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \emptyset\}$$

Funções

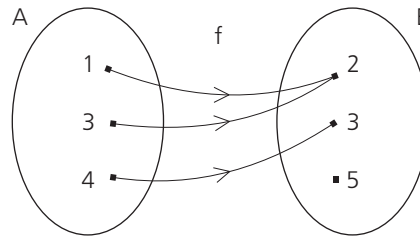
Definição

f é relação entre os conjuntos A e B .

f é função se, e somente se, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$



g não é função



f é função

Domínio de $f = \{1,3,4\} = A$

Imagem de $f = \{2,3\} \subset B$

3 é a imagem de 4, isto é, $3 = f(4)$

Tipos de Funções

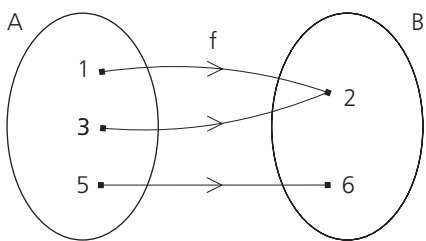
f é função de A em B ($f : A \rightarrow B$).

f é **injetora** se, e somente se, todos os elementos distintos em A têm imagens distintas em B .

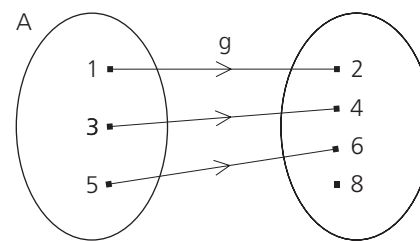
f é **sobrejetora** se, e somente se, todos os elementos de B são imagens de elementos de A : $\text{Im}(f) = B$.

f é **bijetora** se, e somente se, é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

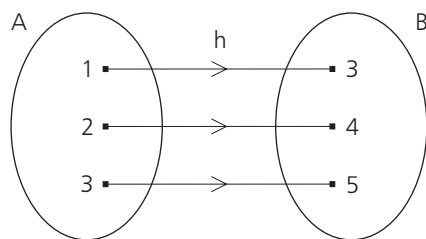
Exemplos:



f é sobrejetora e não é injetora.



g é injetora e não é sobrejetora.



h é bijetora.

Função Par e Ímpar

Função $f : A \rightarrow B$. Se, para todo $x \in A$,

$f(-x) = f(x)$, então f é par.

$f(-x) = -f(x)$, então f é ímpar.

Exemplo:

$f(x) = |x|$ é par.

$f(x) = x^3$ é ímpar.

$f(x) = x^2 + x$ não é par nem ímpar.

Função Composta

Dadas as funções f e g , **f composta g** é a função $f \circ g$ tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Exemplo:

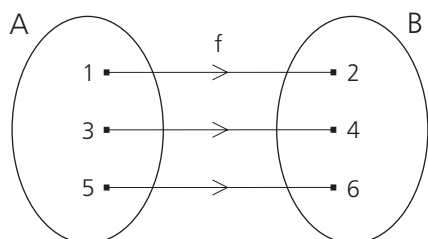
$f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3$.

$f(5) = 2(5) + 1 = 11$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2(x^2 + 3) + 1 = 2x^2 + 7$.

Função Inversa

$f = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$

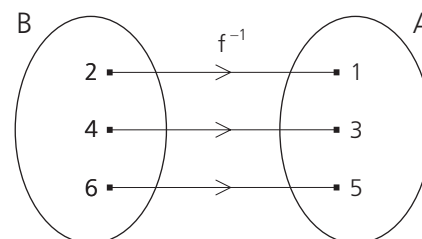


$\text{Dom}(f) = A$

$\text{Im}(f) = B$

Só tem inversa função **bijetora**.

inversa de $f = f^{-1} = \{(2,1),(4,3),(6,5)\}$



$\text{Dom}(f^{-1}) = B$

$\text{Im}(f^{-1}) = A$

Regra prática

Se f é dada por uma sentença matemática troque, nessa sentença, y por x e x por y e isole o y , no 1º membro, para obter a sentença da inversa f^{-1} .

Exemplo:

$f(x) = 2x - 5$. Determinar $f^{-1}(x)$

Sentença de f : $y = 2x - 5$
 \downarrow \downarrow

Sentença de f^{-1} : $x = 2y - 5$, isto é, $y = \frac{x+5}{5}$

Então: $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{5}$

Inequações

Primeiro grau: $5 - 2x < 0 \Rightarrow -2x < -5 \xrightarrow{\text{inverter}} \xrightarrow{-1} 2x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$

Obs: Multiplicando os 2 membros por -1 muda o sentido da desigualdade.

Segundo grau: $x^2 - 5x + 6 < 0$. Raízes: 2 e 3.



Solução: $2 < x < 3$, x real

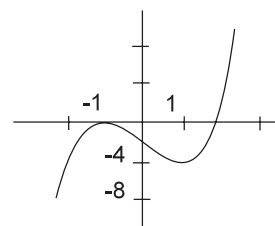
Obs.: Se $\Delta = b^2 - 4ac$ é negativo, o sinal do trinômio é **sempre** o mesmo de a , $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se $\Delta = 0$, o sinal do trinômio é o mesmo de a , $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$.

Exercícios

01. A figura mostra parte do gráfico de uma função polinomial $f(x)$ de grau 3. O conjunto de todos os valores reais de m para os quais a equação $f(x) = m$ tem três raízes reais distintas é:

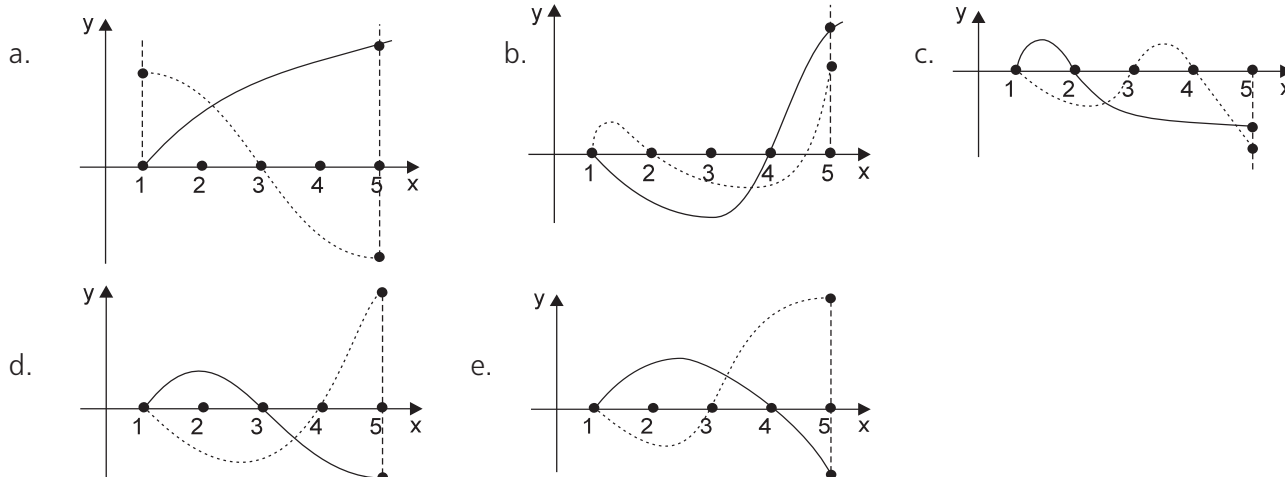
- a. $-4 < m < 0$
- b. $m > 0$
- c. $m < 0$
- d. $-1 < m < 1$
- e. $m > -4$



02. Sendo $A = \{2, 3, 5, 6, 9, 13\}$ e $B = \{a^b \mid a \in A, b \in A \text{ e } a \neq b\}$ o número de elementos de B que são números pares é:

- a. 5
- b. 8
- c. 10
- d. 12
- e. 13

03. Considere duas funções, f e g , definidas no intervalo $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$, tais que $f(1) = g(1) = 0$, $f(3) \cdot g(3) = 0$ e $f(5) > g(5)$. Representando o gráfico de f em linha cheia e o de g em linha tracejada, a figura que melhor se ajusta a esses dados é:



04. O gráfico da função quadrática definida por $y = x^2 - mx + (m - 1)$, onde $m \in \mathbf{R}$, tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas. Então o valor de y que essa função associa a $x = 2$ é
- a. -2 b. -1 c. 0 d. 1 e. 2
05. Em certo ano, ao analisar os dados dos candidatos ao Concurso Vestibular para o Curso de Graduação em Administração, nas modalidades Administração de Empresas e Administração Pública, concluiu-se que:
- 80% do número total de candidatos optaram pela modalidade Administração de Empresas.
 - 70% do número total de candidatos eram do sexo masculino.
 - 50% do número de candidatos à modalidade Administração Pública eram do sexo masculino.
 - 500 mulheres optaram pela modalidade Administração Pública.
- O número de candidatos do sexo masculino à modalidade Administração de Empresas foi
- a. 4.000 b. 3.500 c. 3.000 d. 1.500 e. 1.000
06. Seja a função f , de \mathbf{R} em \mathbf{R} , dada por $f(x) = kx + t$, onde k e t são constantes reais. Se os pontos $(-1; 3)$ e $(0; -1)$ pertencem ao gráfico de f , então
- a. f é crescente, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- b. $\frac{3}{4}$ é raiz da equação $f(x) = 0$.
- c. o ponto $(-10; 41)$ pertence ao gráfico de f .
- d. $f(x) < 0$ se $x < \frac{1}{4}$.
- e. $f(x) \leq 0$ se $x \geq -\frac{1}{4}$.
07. A função f , de \mathbf{R} em \mathbf{R} , dada por $f(x) = ax^2 - 4x + a$ tem um valor máximo e admite duas raízes reais e iguais. Nessas condições, $f(-2)$ é igual a
- a. 4 b. 2 c. 0 d. $-\frac{1}{2}$ e. -2

Dicas

01. Lembre-se:

1. $f(x) = m$ ou $y = m$ é a equação de uma reta **horizontal** (paralela ao eixo das abscissas) passando pelo ponto $(0, m)$ do eixo das ordenadas.
2. As soluções reais da equação $f(x) = m$ (onde $y = f(x)$ é a função dada no gráfico) são os pontos onde a reta $y = m$ intercepta a curva $y = f(x)$. Assim sendo, 3 raízes reais distintas correspondem a todas as retas horizontais que interceptam o gráfico de $y = f(x)$ em três pontos distintos.

02.

a^b será par se a for par!

03. Verifique qual gráfico apresenta o mesmo valor para $x = 1$.

Se $mn = 0$, então $m = 0$ ou $n = 0$.

Verifique em qual gráfico, para $x = 5$, o valor de f supera o de g .

04. Dada a função $y = ax^2 + bx + c$, calcula-se $\Delta = b^2 - 4ac$

Se $\Delta > 0$, o gráfico tem 2 pontos em comum com o eixo das abscissas ($0x$).

Se $\Delta = 0$, o gráfico tem um único ponto em $0x$ e, se $\Delta < 0$, o gráfico não encontra $0x$.

05. Primeiro, um lembrete:

$$20\% \text{ de } x = 20\% \cdot x = \frac{20}{100} \cdot x = 0,2x$$

Com as duas últimas afirmações do problema, você pode deduzir o número de candidatos à Administração Pública.

Com a primeira afirmação, você saberá que 20% dos candidatos são de Administração Pública: será possível, então, calcular o número total de candidatos.

Com a 2.a afirmação, você responde o problema.

06. Se o ponto (m, n) pertence ao gráfico da função $y = ax + b$, então:

$$n = am + b.$$

Lembrando que $(-1, 3)$ e $(0, -1)$ pertencem ao gráfico de $y = kx + t$, calcule t e k .

Construa, para esses valores, o gráfico cartesiano de f .

Analise, no gráfico, as alternativas dadas.

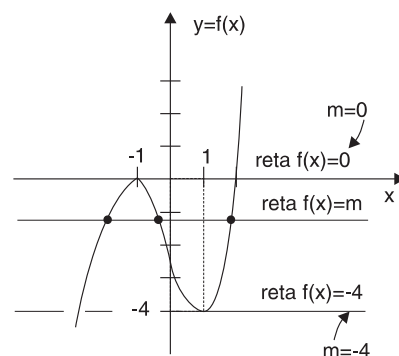
07. Dada a função real $f(x) = ax^2 + bx + c$, lembre-se que:

1. $f(x)$ admite duas raízes reais e iguais quando $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
2. $f(x)$ tem um valor mínimo quando $a > 0$ e um valor máximo quando $a < 0$.
3. $f(k) = ak^2 + bk + c, k \in \mathbb{R}$

Resoluções

01. Alternativa a.

Toda reta **horizontal** (paralela ao eixo das abscissas) é da forma **$f(x) = m$** e, observando a figura, verificamos que, para cortar a curva dada em 3 pontos distintos, é necessário que $-4 < m < 0$.



02. Alternativa c.

Para que a^b seja par é necessário que a seja par!

Portanto os únicos valores para a são 2 e 6.

Se a base a for 2, o expoente pode ser 3, 5, 6, 9 ou 13, e aí teremos 5 resultados.

Se a base for 6, o expoente pode ser 2, 3, 5, 9 ou 13, e aí teremos mais 5 resultados, num total de 10.

03. Alternativa c.

$f(1) = 0$ e $g(1) = 0$ são encontradas em todas as alternativas, exceto em a. (a é Falsa).

$$f(3) \cdot g(3) = 0$$

$$f(3) = 0 \text{ ou } g(3) = 0$$

Na alternativa b, temos $f(3) \neq 0$ e $g(3) \neq 0$ (b é Falsa)

$f(5) > g(x)$ é encontrada nas alternativas a, b e c [em d e e temos: $f(5) < g(x)$]

Como a e b já foram excluídas, conclui-se que a única correta é a alternativa c

04. Alternativa d.

O gráfico de uma função do 2.º grau tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas quando $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

$$\text{Assim, } (-m)^2 - 4(m-1) = 0$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$(m-2)^2 = 0$$

$$m-2 = 0$$

$$m = 2$$

A função fica: $y = x^2 - 2x + 1$

$$\text{Para } x = 2, \text{ temos: } y = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$$

05. Alternativa c.

50% dos candidatos à Administração Pública eram homens, como tínhamos 500 mulheres candidatas a essa opção é fácil concluir que tínhamos, então 500 homens candidatos a Administração Pública. O total de candidatos à Administração Pública foi de 1000 pessoas.

A primeira afirmação do problema é: 80% dos candidatos optaram por Adm. de Empresas. Portanto os outros 20% optaram por Adm. Pública:

$$20\% \text{ de } x = \frac{20}{100} \cdot x = \frac{1}{5} x = 1000 \Rightarrow \left(\begin{array}{c} x \\ \text{n.o total} \\ \text{de candidatos} \end{array} \right) = 5000$$

70% do total de candidatos era do sexo masculino:

$$70\% \text{ de } 5000 = 70\% \cdot 5000 = 0,7 \cdot 5000 = 3500 \text{ de homens.}$$

Como tínhamos 500 candidatos à Adm. Pública os outros 3000 eram candidatos à Adm. de Empresas.

06. Alternativa e.

$(-1, 3)$ pertence ao gráfico de $y = kx + t$.

Então,

$$3 = k(-1) + t$$

$$k = t - 3$$

Como $(0, -1)$ também pertence,

$$-1 = k \cdot 0 + t$$

$$t = -1$$

$$k = -1 - 3 = -4$$

Assim,

$$f(x) = -4x - 1$$

Construamos o gráfico de $f(x)$

$$x = 0 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Analisemos as alternativas:

1. Falsa – $f(x)$ é decrescente em todo \mathbb{R}

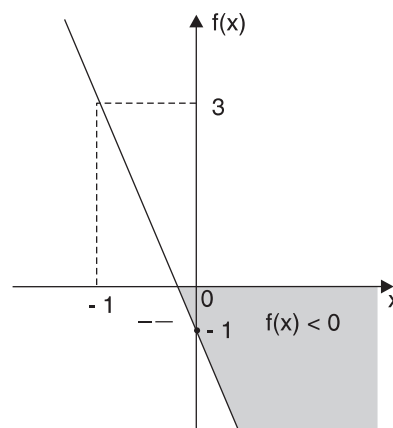
2. Falsa – A raiz é $x = -\frac{1}{4}$

3. Falsa – Para $x = -10$, $f(x) = -4(-10) - 1 = 40 - 1 = 39$

$(-10, 39)$ pertence ao gráfico.

4. Falsa – $f(x) < 0$ se $x > -\frac{1}{4}$. Quando $x < -\frac{1}{4}$, temos $f(x) > 0$.

5. Verdadeira – $f(x) \leq 0$ se $x \geq -\frac{1}{4}$.



07. Alternativa e.

Se a função admite duas raízes reais e iguais, então:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot a \cdot a = 0$$

$$16 - 4a^2 = 0$$

$$a^2 = 4$$

$$a = \pm 2$$

Como a função tem um valor máximo, temos $a < 0$.

Então, $a = -2$

$$\text{Assim, } f(x) = -2x^2 - 4x - 2 \text{ e } f(-2) = -2(-2)^2 - 4(-2) - 2 = -8 + 8 - 2 = -2$$