

Índice

Probabilidades

Resumo teórico	1
Exercícios.....	2
Dicas	3
Resoluções	5

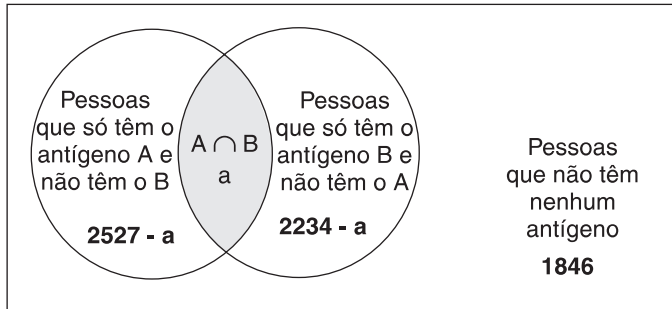


Exercícios

01. Uma pesquisa sobre grupos sanguíneos ABO, na qual foram testadas 6.000 pessoas de uma mesma raça, revelou que 2.527 têm o antígeno A, 2.234 o antígeno B e 1.846 não têm nenhum antígeno. Nessas condições, qual é a probabilidade de que uma dessas pessoas, escolhida aleatoriamente, tenha os dois antígenos?
02. Após uma partida de futebol, em que as equipes jogaram com as camisas numeradas de 1 a 11 e não houve substituições, procede-se ao sorteio de dois jogadores de cada equipe para exame anti-doping. Os jogadores da primeira equipe são representados por 11 bolas numeradas de 1 a 11 de uma urna A e os da segunda, da mesma maneira, por bolas de uma urna B. Sorteia-se primeiro, ao acaso e simultaneamente, uma bola de cada urna. Depois, para o segundo sorteio, o processo deve ser repetido, com as 10 bolas restantes de cada urna. Se na primeira extração foram sorteados dois jogadores de números iguais, a probabilidade de que aconteça o mesmo na segunda extração é de:
- 0,09
 - 0,1
 - 0,12
 - 0,2
 - 0,25
03. Num grupo de 100 pessoas da zona rural, 25 estão afetadas por uma parasitose intestinal **A** e 11 por uma parasitose intestinal **B**, não se verificando nenhum caso de incidência conjunta de **A** e **B**. Duas pessoas desse grupo são escolhidas, aleatoriamente, uma após a outra. Determine a probabilidade de que, essa dupla, a primeira pessoa esteja afetada por **A** e a segunda por **B**.
- 04.
- Uma urna contém três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna de modo que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul seja igual $\frac{2}{3}$?
 - Considere agora uma outra urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e x bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, a sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, uma bola dessa urna. Para que valores de x a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor vale $\frac{1}{2}$?
05. Escolhem-se aleatoriamente três dos seis vértices de um hexágono regular. Qual a probabilidade de que os vértices escolhidos formem um triângulo equilátero?
06. Escolhemos ao acaso duas faces distintas de um octaedro (cujas faces são triângulos equiláteros). A probabilidade de serem adjacentes é
- $\frac{1}{8}$
 - $\frac{1}{7}$
 - $\frac{3}{8}$
 - $\frac{3}{7}$
 - $\frac{5}{8}$
07. São efetuados lançamentos sucessivos e independentes de uma moeda perfeita (as probabilidades de cara e de coroa são iguais) até que apareça cara pela segunda vez.
- Qual é a probabilidade de que a segunda cara apareça no oitavo lançamento?
 - Sabendo-se que a segunda cara apareceu no oitavo lançamento qual é a probabilidade condicional de que a primeira cara tenha aparecido no terceiro?

Dicas

01. 2527 pessoas têm o antígeno A } existem pessoas que têm os 2 antígenos
 2234 pessoas têm o antígeno B }
 e estão na intersecção desses dois conjuntos.



$$n(A) + n(B) + n(A \cap B) + 1846 = 6000$$

$$P\left(\begin{array}{l} \text{pessoa escolhida} \\ \text{ter dois antígenos} \end{array}\right) = \frac{a}{\left(\begin{array}{l} \text{total de} \\ \text{pessoas} \end{array}\right)}$$

02. Considere as extrações como pares ordenados: a 1.a extração de A, a 2.a de B.
 O espaço amostral seria
 $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3) \dots, (10, 10)\}$
 (suponha que as bolas 11 foram sorteadas)
 Escreva o conjunto A dos pares com termos iguais.

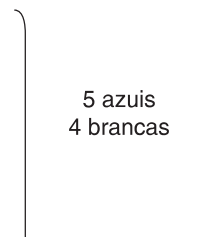
03. A probabilidade de escolhermos uma pessoa afetada pela moléstia A é igual ao número de pessoas afetadas pela moléstia dividido pelo número de pessoas do grupo (100)
 Quando você for escolher a 2.a pessoa não esqueça que agora temos 99 pessoas no grupo!

04.
 a. Chame de a o número de bolas azuis e considere que a probabilidade de retirarmos 1 bola azul é igual ao número de bolas azuis dividido pelo número de bolas da urna.
 b. Veja este exemplo:

$$P(2 \text{ azuis}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \text{ (extração com reposição)}$$

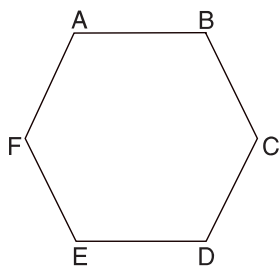
$$P(2 \text{ brancas}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$$

$$P(2 \text{ bolas da mesma cor}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$$



Adapte o exemplo acima às condições do problema; não esqueça de igualar a probabilidade a $\frac{1}{2}$.

05. Considere o desenho.

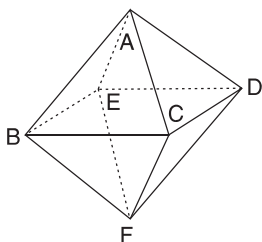


Lembre-se que o triângulo $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$, portanto a ordem de escolha dos pontos **não** é importante. Observe a figura e “conte” quantos triângulos são equiláteros.

06. Lembre-se da figura do octaedro:

Conte o número de duplos de faces: das 9 escolhemos 2.

Observe que duas faces são adjacentes quando compartilham a mesma aresta, portanto conte o número de arestas!



07. O espaço amostral é formado por todas as seqüências com 8 termos.

No 1.o lançamento temos duas possibilidades, no 2.o duas possibilidades, e assim por diante.

Para contar o número de seqüências com 2 caras, sendo uma no 8.o termo, procure escrevê-las à mão.

Resoluções

01. (Universo de pessoas testadas)

(pessoas que possuem o antígeno A)	a (pessoas que possuem os dois antígenos)	(pessoas que possuem o antígeno B)
2527 - a		2234 - a

(pessoas que não possuem nenhum antígeno) 1846

$$P(\text{pessoa escolhida ter dois antígenos}) = \frac{a}{\text{total de pessoas}} = \frac{607}{6000}$$

$$2527 - a + a + 2234 - a + 1846 = 6000$$

$$a = 607 \Rightarrow \frac{607}{6000} \cong 10\%$$

02. Alternativa b.

Vamos montar um espaço amostral como pares ordenados onde o 1.o termo é o resultado da urna A e o 2.o termos é a extração da urna B. (Vamos supor que foram sorteadas as bolas de número 11)

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (10, 9), (10, 10)\}$$

$$n(E) = 10 \cdot 10 = 100$$

Seja o evento A com duplas de resultados iguais:

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10)\}$$

$$n(A) = 10$$

$$P(A) = \frac{10}{100} = 0,1$$

outra solução:

Após a 1.a extração sobraram 10 números em cada urna. A probabilidade de extraírmos um número qualquer na urna é $\frac{10}{10}$, e de sortearmos o mesmo na urna B é de $\frac{1}{10}$, pois deve ser igual ao da urna A.

$$P = \frac{10}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0,1$$

03.

$$\left(\begin{array}{l} \text{probabilidade da} \\ \text{1.a pessoa estar} \\ \text{afetada pela moléstia A} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{l} \text{probabilidade da} \\ \text{2.a pessoa estar} \\ \text{afetada pela moléstia B} \end{array} \right) = \frac{25}{100} \times \frac{11}{99} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$$

↓
(já retiramos)
(uma pessoa)

04.

a. A probabilidade de se retirar uma bola azul é igual ao número de bolas azuis dividido pelo número total de bolas.

Vamos chamar de **a** o número de bolas azuis da urna:

$$P(\text{azul}) = \frac{a}{8+a} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3a = 2(8+a) \Rightarrow 3a = 16 + 2a \Rightarrow a = 16 \text{ bolas azuis}$$

5 brancas 3 pretas a azuis

b. Essa outra urna fica assim:

A probabilidade de retirarmos 2 bolas pretas é:

$$P(2 \text{ pretas}) = \frac{1}{5+x} \cdot \frac{1}{5+x} = \frac{1}{(5+x)^2} \quad (1)$$

(5 + x)
bolas na
urna

1 preta 4 brancas x azuis

A probabilidade de retirarmos 2 bolas brancas é: $P(2 \text{ brancas}) = \frac{4}{(5+x)} \cdot \frac{4}{(5+x)} = \frac{16}{(5+x)^2} \quad (2)$

A probabilidade de retirarmos 2 bolas azuis é: $P(2 \text{ azuis}) = \frac{x}{(5+x)} \cdot \frac{x}{(5+x)} = \frac{x^2}{(5+x)^2} \quad (3)$

O problema pede o valor de x para que a probabilidade de retirarmos 2 bolas da mesma cor seja $\frac{1}{2}$, devemos considerar, então, as três situações (1), (2) e (3).

$$P(2 \text{ bolas da mesma cor}) = \frac{1}{(5+x)^2} + \frac{16}{(5+x)^2} + \frac{x^2}{(5+x)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{17+x^2}{(5+x)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 34 + 2x^2 = 25 + 10x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot (x-9) = 0$$

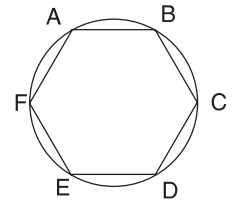
a urna deve ter 1 ou 9 bols azuis.

05. Sejam pontos A, B, C, D, E, F vértices de um hexágono regular.

O espaço amostral será formado por todos os subconjuntos com 3 vértices.

{A, B, C} , {A, B, D} , etc

$$n(E) = C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{6 \cdot 3!} = 20$$



Quantos subconjuntos são vértices de um triângulo equilátero?

{A, C, E} , {B, D, F} apenas

$$P = \frac{2}{C_{6,3}} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

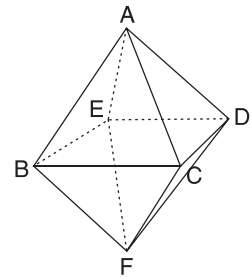
06. Alternativa c.

O espaço amostral desse experimento será formado por todas as duplas de faces quaisquer. Como temos 8 faces o número de elementos do espaço amostral será:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 6!} = 28$$

Duas faces são adjacentes quando compartilham uma mesma aresta.

Se contarmos o número de arestas contaremos, então, o número de faces adjacentes. O octaedro possui 12 arestas.



$$P = \frac{\text{n.o de faces adjacentes}}{\text{n.o de duplas de faces}} = \frac{12}{28} = \frac{3}{8}$$

07. O espaço amostral desse experimento é formado por todas as seqüências de oito termos: K (cara) e C (coroa)

$$n(E) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$$

a. Aqui teremos que contar todas as seqüências de 8 lançamentos, com duas caras (K) sendo que a segunda cara (K) está no 8.o lançamento.

A = {(K, C, C, C, C, C, C, K) , (C, K, C, C, C, C, C, K) , (C, C, K, C, C, C, C, K) ,
(C, C, C, K, C, C, C, K) , (C, C, C, C, K, C, C, K) , (C, C, C, C, C, K, C, K) ,
(C, C, C, C, C, C, K, K)}

$$n(A) = 7$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{7}{256}$$

b. Agora o nosso universo de interesse possa a ser o conjunto A, ele é nosso "novo" espaço amostral.

Quantas seqüências em A, tem cara (K) no 3.o lançamento (termo)?

B = {(C, C, K, C, C, C, C, K)} n(B) = 1 (apenas um!)

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{1}{7}$$