

Índice

Análise Combinatória e Binômio de Newton

Resumo teórico	1
Exercícios.....	4
Dicas	5
Resoluções	7



Análise Combinatória e Binômio de Newton

Resumo Teórico

Fatorial

$$\begin{cases} n! = n \cdot (n-1)!, & n \in \mathbb{N} \\ 1! = 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

Exemplo: $4! = 4 \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3!} = 4 \cdot 3!$

Para lembrar

1. Simplifique as expressões:

a. $\frac{7!9!}{6!8!} = \frac{7 \cdot 6! \cdot 9 \cdot 8!}{6!8!} = 7 \cdot 9 = 63$

b. $\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)!}{(2n)!} = 2(n+1)(2n+1)$

2. Resolva a equação:

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{4n} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n+1) \cdot (n) \cdot (n-1)!} = \frac{1}{4n} \Rightarrow \frac{1}{(n+1) \cdot n} = \frac{1}{4n} \Rightarrow 4n = (n+1) \cdot n$$

$$\Rightarrow 4n = n^2 + n \Rightarrow n^2 - 3n = 0 \Rightarrow n \cdot (n-3) = 0 \quad \begin{cases} n = 3 \\ n = 0 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

$$S = \{3\}$$

Binômio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \underbrace{\binom{n}{p}a^{n-p} \cdot b^p}_{\text{termo geral}} + \dots + \binom{n}{n}a^0 \cdot b^n$$

Exemplo: $(x+3)^5 = \binom{5}{0}x^5 \cdot 3^0 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 3^1 + \binom{5}{2}x^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot 3^3 + \binom{5}{4}x^1 \cdot 3^4 + \binom{5}{5}x^0 \cdot 3^5$

Obs: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
↓
número binominal

Para lembrar

Qual é o coeficiente do termo que contém o fator y^4 no desenvolvimento de $\left(\frac{1}{2}x^2 - y\right)^{10}$?

Termo geral: $\binom{10}{p} \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{10-p} \cdot (-y)^p$ $p = 4 \Rightarrow$ o termo é

$$\binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}x^2\right)^6 \cdot (-y)^4 = \frac{10!}{4!6!} \frac{1}{2^6} \cdot x^{12}y^4 = \frac{10 \cdot \overset{3}{9} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} \cdot \frac{1}{2^6} x^{12}y^4 = \frac{210}{64} x^{12}y^4; \text{ o coeficiente é } \frac{210}{64} = \frac{105}{32}.$$

Obs.: termo independente de x é aquele cujo expoente de x é zero.

Análise Combinatória

Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Se um evento A pode ocorrer de a modos diferentes e se para cada um desses a modos um segundo evento B pode ocorrer de b modos distintos, então o número de maneiras em que esses eventos podem ocorrer na ordem indicada é:

$$a \cdot b$$

Para lembrar

Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, quantos números com dois algarismos distintos podemos formar?

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(PFC)}}}{7} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(PFC)}}}{6} = 42 \text{ números}$$

para escolher o algarismo das dezenas temos 7 modos ou escolhas

para escolher o algarismo das unidades temos 6 opções, pois este deve ser diferente do das dezenas.

Permutação (embaralhamento)

De quantas maneiras podemos embaralhar as letras da palavra BOTA?

$$\overset{\text{PFC}}{4} \cdot \overset{\text{PFC}}{3} \cdot \overset{\text{PFC}}{2} \cdot 1 = 4! = 24 \text{ a estas seqüências chamamos de anagramas}$$

→ (4.a e última letra)

→ (3.a letra)

→ (n.o de opções para a 2.a letra)

→ (n.o de opções para a 1.a letra)

Arranjo

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ aqui os objetos são } \mathbf{ordenados!}$$

Combinação

$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ aqui os objetos **não** são ordenados!

Veja a diferença entre **arranjo** e **combinação**:

- Quantos números naturais de 3 algarismos **distintos** podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 5 e 7?

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{c} \underline{5} \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{l} \text{n.o de opções} \\ \text{para as centenas} \end{array} \right) \end{array} & \cdot & \begin{array}{c} \underline{4} \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{l} \text{n.o de opções} \\ \text{para as dezenas} \end{array} \right) \end{array} & \cdot & \begin{array}{c} \underline{3} \\ \downarrow \\ \text{(unidades)} \end{array} & = & \begin{array}{c} \underline{A_{5,3}} \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{l} \text{de 5 objetos} \\ \text{escolhemos 3} \\ \text{ordenadamente} \\ \Rightarrow 123 \neq 312 \end{array} \right) \end{array} & = \\
 \text{(PFC)} & & \text{(PFC)} & & & & & &
 \end{array}$$

$$= \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$$

- Quantos produtos distintos podemos obter com 3 fatores distintos escolhidos entre os números 1, 2, 3, 5 e 7?

Observe que $2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ e $5 \cdot 3 \cdot 2 = 60 \Rightarrow$ **A ordem dos fatores não altera o produto**

De um grupo de 5 objetos, escolhemos 3

$$C_{5,3} = \frac{\text{Arranjo de 3 objetos}}{\text{Permutação dos 3 objetos}} = \frac{A_{r,p}}{p!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$$

Permutação com Elementos Repetidos

$P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!}$, a, b e c são o n.o de vezes que determinado objeto aparece na sequência de n objetos

Para lembrar

Quantos são os anagramas da palavra OTORRINO?

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{OOO} & \underline{T} & \underline{RR} & \underline{I} & \underline{N} \\
 \underline{3} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{1}
 \end{array}$$

$$P_8^{3,2,1,1,1} = \frac{8!}{3!2!1!1!1!} = \frac{8!}{3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = 3360$$

Exercícios

01. Quantos são os números inteiros positivos de 5 algarismos que não têm algarismos adjacentes iguais?

- a. 5^9
- b. 9×8^4
- c. 8×9^4
- d. 8^5
- e. 9^5

02. Lembrando que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

a. calcule $\binom{n}{p}$

b. simplifique a fração $\frac{\binom{12}{4}}{\binom{12}{5}}$.

c. determine os inteiros n e p de modo que $\frac{\binom{n}{p}}{1} = \frac{\binom{n}{p+1}}{2} = \frac{\binom{n}{p+2}}{3}$.

03. Dadas as informações:

I. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n, n \in \mathbb{N}$

II. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, 2, \dots, n$

III. Existem mais possibilidades de escolher 44 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50 do que escolher 6 números diferentes entre os inteiros de 1 a 50.

Conclui-se que:

- a. todas são verdadeiras.
- b. apenas I e II são verdadeiras.
- c. apenas I é verdadeira.
- d. apenas II é verdadeira.
- e. apenas II e III são verdadeiras.

04. Considere todas as trinta e duas seqüências, com cinco elementos cada uma, que podem ser formadas com os algarismos 0 e 1. Quantas dessas seqüências possuem **pelo menos** três zeros em posições consecutivas?

- a. 3
- b. 5
- c. 8
- d. 12
- e. 16

05.

- Quantos conjuntos de 3 letras distintas podem ser formados usando as letras da palavra INTEGRAL?
- Qual a probabilidade de, escolhendo ao acaso um desses conjuntos, obtermos um que inclua a letra "L"?

06. A diretoria de uma empresa compõe-se de n dirigentes, contando o presidente. Considere todas as comissões de três membros que poderiam ser formadas com esses n dirigentes. Se o número de comissões que incluem o presidente é igual ao número daquelas que não o incluem, calcule o valor de n .

07. Nove times de futebol vão ser divididos em 3 chaves, todas com o mesmo número de times, para a disputa da primeira fase de um torneio. Cada uma das chaves já tem um cabeça de chave definido. Nessas condições, o número de maneiras possíveis e diferentes de se completarem as chaves é:

- 21
- 30
- 60
- 90
- 120

Dicas

01. Lembre-se que o ZERO não pode ser colocado na dezena de milhar. Uma vez escolhido um algarismo o "próximo" não deve ser igual.

$$\underbrace{9}_{\substack{\text{vamos supor que} \\ \text{você escolheu o 2}}} \times \underbrace{9}_{\substack{\text{o "próximo" pode ser} \\ \text{qualquer um, exceto o 2}}}$$

02.

a e b. Lembre-se que $8! = 8 \cdot 7!$ e $\frac{(n-p)!}{(n-p-1)!} = \frac{(n-p) \cdot (n-p-1)!}{(n-p-1)!}$

c. simplifique a expressão $\frac{\binom{n}{p}}{1} = \frac{\binom{n}{p+1}}{2}$ e monte uma equação (1)

simplifique a expressão $\frac{\binom{n}{p+1}}{2} = \frac{\binom{n}{p+2}}{3}$ e monte uma equação (2)

com as equações (1) e (2) monte um sistema.

03.

I. Lembre-se do teorema da linha do triângulo de Pascal:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1+1 \quad \rightarrow \quad 2^1$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 1+2+1 \quad \rightarrow \quad 2^2$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 1+3+3+1 \quad \rightarrow \quad 2^3$$

II. Escreva uma linha do triângulo de Pascal, a 6 por exemplo, e tente concluir alguma coisa sobre os números "iguais" que vão aparecer ali.

III. Escolher 44 números entre 50 disponíveis é $C_{50,44}$. Escolha 6 entre os 50 e compare os resultados.

04. Tente escrever as seqüências que o exercício pede. Por exemplo, com 3 zeros consecutivos temos:

$(0, 0, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 0, 1)$ e $(1, 1, 0, 0, 0)$

05.

- Como o problema pede conjuntos, faça a combinação das 8 letras 3 a 3.
- Vamos dar um exemplo como dica:

Quantas comissões de 4 pessoas podemos formar com 10 pessoas disponíveis sendo que uma delas deve, obrigatoriamente participar dessa comissão?

As pessoas podem ser A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e a presença obrigatória da B

$$\left\{ \underbrace{B}_{\text{(B já foi incluída)}}, \overbrace{, , ,}^{\text{(sobraram A, C, D, E, F, G, H, I, J disponíveis, entre as quais vamos escolher 3 para completar a comissão)}} \right\} \rightarrow C_{9,3}$$

Para o nosso problema pense: em quantas "comissões" o L está incluído?

06. Antes de partir para as condições do problema imagine um caso particular com, por exemplo, 5 pessoas: A, B, C, D, P

Como você montaria comissões de três pessoas nas quais P está presente?

$\{P, , \}$ sobram A, B, C, D

Como você montaria comissões nas quais P não está presente?

$\{ , , \}$ a escolha deve ser feita entre as 4 pessoas disponíveis!

Ao final da resolução do problema será interessante lembrar que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \text{ se } p=q \text{ ou } p+q=n$$

07. Leve em consideração que, se os cabeça de chave já foram escolhidos, sobram 6 times para distribuir pelas 3 chaves.

Dos 6 times escolha 2 para a 1.a chave, dos 4 que restaram escolha 2 para a 2.a chave; os que restarem ficarão na 3.a chave.

Resoluções

01. Alternativa e.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \text{não pode ser} & & \\
 & & & & \text{igual ao anterior} & & \\
 9 & \times & 9 & \times & \overbrace{9 \times 9 \times 9} & = & 9^5 \\
 \underbrace{}_{\text{(dezena de} & & \underbrace{}_{\text{(milhar)}} & & \text{(centena)} & \text{(dezena)} & \text{(unidade)} \\
 \text{milhar)}} & & & & & & \\
 \text{o zero não} & & \text{uma vez escolhido} & & & & \\
 \text{pode ficar} & & \text{o algarismo da} & & & & \\
 \text{aqui} & & \text{dezena de milhar,} & & & & \\
 & & \text{o de milhar não} & & & & \\
 & & \text{pode ser igual} & & & &
 \end{array}$$

02.

$$\text{a. } \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$\text{b. } \frac{\binom{12}{4}}{\binom{12}{5}} = \frac{\frac{12!}{4!(12-4)!}}{\frac{12!}{5!(12-5)!}} = \frac{12!}{4!8!} \cdot \frac{5!7!}{12!} = \frac{5 \cdot 4! \cdot 7!}{4! \cdot 8 \cdot 7!} = \frac{5}{8}$$

c. 1.o

$$\begin{aligned}
 \frac{\binom{n}{p}}{1} &= \frac{\binom{n}{p+1}}{2} \Rightarrow 2 \binom{n}{p} = \binom{n}{p+1} \Rightarrow 2 \cdot \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p+1)![n-(p+1)]!} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{2 \cdot n!}{p!(n-p)!} &= \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \Rightarrow \frac{2}{p!(n-p) \cdot (n-p-1)!} = \frac{1}{(p+1) \cdot p!(n-p-1)!} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{2}{n-p} &= \frac{1}{p+1} \Rightarrow n-p = 2p+2 \Rightarrow 3p-n = -2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

2.o

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{p+1}}{2} &= \frac{\binom{n}{p+2}}{3} \Rightarrow 3\binom{n}{p+1} = 2\binom{n}{p+2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 \cdot \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} &= 2 \cdot \frac{n!}{(p+2)!(n-(p+2))!} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3 \cdot n!}{(p+1)!(n-p-1)!} &= \frac{2 \cdot n!}{(p+2)!(n-p-2)!} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3}{(p+1)!(n-p-1) \cdot (n-p-2)!} &= \frac{2}{(p+2)(p+1)!(n-p-2)!} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3}{n-p-1} = \frac{2}{p+2} \Rightarrow 3p+6 &= 2n-2p-2 \Rightarrow 5p-2n = -8 \quad (2)\end{aligned}$$

Com as equações (1) e (2) montamos o sistema:

$$\begin{cases} 3p-n = -2 & \times(-2) \\ 5p-2n = -8 \end{cases} \sim \begin{cases} -6p+2n = 4 \\ \underline{5p-2n = -8} \quad + \\ -p = -4 \Rightarrow p = 4 \end{cases}$$
$$3p-n = -2 \Rightarrow 3 \cdot (4) - n = -2 \Rightarrow n = 14$$

03. Alternativa b.

1. Usando o teorema binomial temos:

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= \binom{n}{0} 1^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 \cdot 1^n = \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n, \text{ verdadeira.}\end{aligned}$$

2.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ podemos desenvolver o 2.o membro:}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)![n-n+k]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

podemos, também, lembrar da condição para que dois números binomiais sejam iguais:

$$\binom{p}{q} = \binom{n}{q} \Rightarrow p=q \text{ ou } p+q=n$$

$$\text{ex: } \binom{5}{2} = \binom{5}{2} \text{ ou } \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ pois } k+n-k=n \text{ verdadeira}$$

3. De quantos modos podemos escolher 6 números diferentes entre os inteiros de 1 a 50?

$$C_{50,44} = \binom{50}{44}$$

De quantos modos podemos escolher 6 números diferentes entre os inteiros de 1 a 50?

$$C_{50,6} = \binom{50}{6}$$

Observe que $\binom{50}{44} = \binom{50}{6}$ pois $44 + 6 = 50$

04. Alternativa c.

Vamos escrever as seqüências com 3 zeros consecutivos.

(0, 0, 0, 0, 1); (1, 0, 0, 0, 1) e (1, 1, 0, 0, 0)

Agora com 4 zeros consecutivos:

(0, 0, 0, 0, 1); (1, 0, 0, 0, 0)

Com 4 zeros, mas 3 consecutivos:

(0, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 0)

Com 5 zeros:

(0, 0, 0, 0, 0)

Total: 8

05.

a. Vamos escolher 3 letras de 8 disponíveis:

$$\text{INTEGRAL} : C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! 5!} = 56 \text{ conjuntos}$$

b. Um subconjunto de 3 letras que contém a letra L é:

$\{L, \underbrace{\quad, \quad}_{21=C_{7,2}}\}$ INTEGRA
← (como sobraram 7 letras, entre essas escolhemos 2)

A probabilidade procurada é:

$$P(B) = \frac{\left(\begin{array}{l} \text{n.o de subconjuntos} \\ \text{que têm L} \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} \text{n.o total de subconjuntos} \\ \text{de 3 letras} \end{array} \right)} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

06. Vamos imaginar o presidente e outros 4 dirigentes A, B, C, D.

Para formar comissões de três pessoas onde o diretor deve comparecer temos:

$$\{P, \underbrace{\quad, \quad}\} C_{4,2}$$

esses lugares devem ser preenchidos por 2 pessoas entre as $4(n - 1)$ que restaram!

$$\text{Se a comissão não inclui o presidente P, temos: } \{\underbrace{\quad, \quad, \quad}\} C_{4,3}$$

esses lugares devem ser preenchidos por 3 pessoas entre as $4(n - 1)$ disponíveis; o presidente foi excluído.

Voltemos as condições do problema:

$$\text{número de comissões que incluem o presidente: } C_{n-1,2} = \binom{n-1}{2} \quad (1)$$

$$\text{número de comissões que não incluem o presidente: } C_{n-1,3} = \binom{n-1}{3} \quad (2)$$

$$\text{igualando 1 e 2 temos } \binom{n-1}{2} = \binom{n-1}{3} \Rightarrow 2 + 3 = n - 1 \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

07. Alternativa d.

Se os cabeças de chave já foram definidos então só precisamos distribuir 6 times em 3 chaves

$$\text{Dos 6 times vamos escolher 2 para a 1.a chave: } C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 4!} = 15$$

$$\text{Agora restam 4 times, desses 4 vamos escolher 2 para a 2.a chave: } C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} = 6$$

$$\text{Os dois que restaram ficam na última chave: } C_{2,2} = 1$$

Pelo princípio fundamental da contagem devemos multiplicar o número de possibilidades de cada etapa, então: $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$