

Índice

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

Resumo Teórico	1
Exercícios.....	5
Dicas	6
Resoluções	7



Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

Resumo Teórico

Matrizes

Representação

$A = (a_{ij})$ 2×3 pode ser representada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

Matriz Transposta

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 2 \\ c & 3 \end{bmatrix}$$

Igualdade de Matrizes

$A = B \Leftrightarrow (a_{ij}) = (b_{ij})$ para todo i e todo j .

Adição de Matrizes

$C = A + B \Leftrightarrow (c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$ para todo i e todo j .

Propriedades

- $-A = (-a_{ij})$ para todo i e j
- $A + B = B + A$
- $A + O = A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $B - A = B + (-A)$

Multiplicação de Matriz por Número

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{bmatrix}$$

Propriedades

- Em geral $A \cdot B \neq B \cdot A$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $AI = IA = A$, I matriz identidade

Matriz Quadrada

Número de linhas = número de colunas

Determinante

Matriz 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Matriz 3x3: Regra de Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Matriz Inversa (A^{-1})

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$$

- Só existe para matrizes quadradas
- Só existe A^{-1} quando $\det(A) \neq 0$ e neste caso $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$$c. \text{ Se } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}, \Delta = \det(A)$$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz é igual à soma do produto dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Regra de Chió

Só vale se $a_{11} = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ c & 2 & 3 \\ d & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-ac & 3-bc \\ 4-ad & 5-bd \end{vmatrix}$$

Propriedades dos Determinantes

- $\det(A^t) = \det(A)$.
- Se uma linha (ou coluna) é formada só de zeros, o determinante é igual a zero.
- Quando trocamos de lugar duas linhas (ou colunas) paralelas, o determinante fica multiplicado por -1 .
- Se duas linhas (ou colunas) paralelas são iguais (ou proporcionais), o determinante é igual a zero.
- Se os elementos de uma linha (ou coluna) apresentam um fator comum k , este pode ser colocado em evidência.
- Se A é uma matriz quadrada de ordem n , então $\det(k.A) = k^n \cdot \det(A)$
- Teorema de Binet: $\det(A.B) = \det(A) \cdot \det(B)$
Atenção: em geral, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
- Teorema de Jacobi (importante para obtenção de zeros). O determinante de uma matriz não se altera quando somamos a uma linha (ou coluna) outra linha (ou coluna) paralela multiplicada por uma constante.

i. Matriz Triangular: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & - & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 4 \cdot (-5) \cdot 8$

Sistemas Lineares

Regra de Cramer

$$\text{Dado o sistema } \begin{cases} a_1^x + b_1^y + c_1^z = d_1 \\ a_2^x + b_2^y + c_2^z = d_2 \\ a_3^x + b_3^y + c_3^z = d_3 \end{cases}$$

$$\text{Seja } D \text{ o determinante da matriz dos coeficientes, isto é, } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

e D_x , D_y e D_z os determinantes que se obtém de D substituindo os coeficientes de x , y e z ,

$$\text{respectivamente pelos termos independentes } (d_1, d_2 \text{ e } d_3). \text{ Por exemplo, } D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Se $D \neq 0$, então o sistema tem solução única dada por:

$$x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}; z = \frac{D_z}{D}$$

Classificação e Discussão de um Sistema Linear

Todo sistema normal (n equações e n incógnitas), é classificado em:

- Sistema Possível e Determinado (SPD) - Admite uma única solução. $D \neq 0$.
- Sistema Possível e Indeterminado (SPI) - Admite infinitas soluções. $D = 0$.
- Sistema Impossível - Não admite solução. $D = 0$.

Sistemas Homogêneos

Todos os termos independentes são nulos. Neste caso o sistema admite a solução trivial (ou imprópria) $x = y = z = 0$. Temos então:

- $D \neq 0 \Rightarrow$ A única solução é a trivial $(0,0,0)$. O sistema é SPD.
- $D = 0 \Rightarrow$ Admite além da solução trivial outras soluções. O sistema é SPI.

Atenção: Um sistema homogêneo nunca será impossível.

Exercícios

01. Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, então $A \cdot B$ é a matriz

a. $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 6 & 26 \\ 7 & 31 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 5 & 21 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$

02. Determine os valores de x , y e z na igualdade abaixo, envolvendo matrizes reais 2×2 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 0 \\ x & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z-4 & 0 \\ y-z & 0 \end{bmatrix}$$

03.

a. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule a sua inversa A^{-1} .

b. A relação especial, que você deve ter observado entre A e A^{-1} acima, seria também encontrada se calculássemos as matrizes inversas de:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Generalize e demonstre o resultado observado.

04. Considere as matrizes reais 2×2 do tipo

$$A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$$

a. Calcule o produto $A(x) \cdot A(x)$

b. Determine todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ para os quais $A(x) \cdot A(x) = A(x)$.

05. Se $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, então o valor do determinante $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & d & 1 \\ c & 0 & 2 \end{vmatrix}$ é

a. 0

b. bc

c. $2bc$

d. $3bc$

e. b^2c^2

06. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere as matrizes reais 2×2

$A = \begin{bmatrix} 3^a & -1 \\ -1 & 3^a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7^{a-1} & 8^{a-3} \\ 7 & 2^{-3} \end{bmatrix}$ e, o produto AB será inversível se e somente se:

a. $a^2 - 5a + 6 \neq 0$

b. $a^2 - 5a \neq 0$

- c. $a^2 - 3a \neq 0$
- d. $a^2 - 2a + 1 \neq 0$
- e. $a^2 - 2a \neq 0$

07. Considere **A** e **B** matrizes reais 2×2 , arbitrárias. Das afirmações abaixo assinale a verdadeira. No seu caderno de respostas, justifique a afirmação verdadeira e dê exemplo para mostrar que cada uma das demais é falsa.

- a. Se **A** é não nula então possui inversa.
- b. $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{A}^t \mathbf{B}^t$
- c. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$
- d. $\det \mathbf{A}^2 = 2 \det \mathbf{A}$
- e. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

Dicas

01. Vamos dar um exemplo de produto de duas matrizes para você lembrar:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5 \cdot 7 + 3 \cdot 1) & (5 \cdot 8 + 3 \cdot 1) \\ (1 \cdot 7 + 0 \cdot 1) & (1 \cdot 8 + 0 \cdot 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35+3 & 40+3 \\ 7+0 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 43 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

02. Dadas duas matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

03. Para calcular a inversa de uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ podemos usar a fórmula $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

onde $ad - bc \neq 0$.

Se $ad - bc = 0$ a matriz não será inversível.

04. Faça o produto das matrizes e não esqueça que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

05. Comece calculando o valor dos dois determinantes e depois faça uma substituição do primeiro resultado no segundo.

06.

- 1. Para que uma matriz seja inversível, o seu determinante tem que ser diferente de zero.
- 2. Teorema de Binet: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- 3. $\det(AB) \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$

07.

1. Uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ não é inversível se o seu determinante for igual a zero, ou seja, se $ad - bc = 0$.
2. Teorema de Binet: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
3. Lembre-se de que o produto de matrizes não é comutativo, ou seja, nem sempre temos $AB = BA$.
4. $\det A^2 = \det (A \cdot A)$
5. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
6. $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Resoluções

01. Alternativa b

Vamos efetuar o produto $A \cdot B =$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0 \cdot 4 + 1 \cdot 6) & (0 \cdot 5 + 1 \cdot 7) \\ (2 \cdot 4 + 3 \cdot 6) & (2 \cdot 5 + 3 \cdot 7) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0+6 & 0+7 \\ 8+18 & 10+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

02.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x-y & 0 \\ x & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z-4 & 0 \\ y-z & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x-y+z-4 & 0 \\ x+y-z & z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x-y+z-4=0 & \text{I} \\ x+y-z=0 & \text{II} \\ x^2=z & \text{III} \end{cases}$$

Somando as equações I e II, temos: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Substituindo $x = 2$ em III, temos: $z = 4$

Substituindo em II, temos: $2 + y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$

Resposta: $x = 2, y = 2, z = 4$

03.

a. Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, então:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resposta: } A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b. A relação especial encontrada foi $A^{-1} = A$.

Observando as matrizes $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ notamos que todas são iguais às suas respectivas inversas. Notamos também que $a_{22} = -a_{11}$, $a_{12} = -a_{11} + 1$ e $a_{21} = a_{11} + 1$, fazendo $a_{11} = a$ podemos generalizar a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ como $\begin{bmatrix} a & -a + 1 \\ a + 1 & -a \end{bmatrix}$

Resposta: A matriz $\begin{bmatrix} a & -a + 1 \\ a + 1 & -a \end{bmatrix}$ é inversa de si mesma.

04.

a. Calculando o produto $A(x) \cdot A(x)$, temos:

$$A(x) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ 2 \operatorname{sen} x \cos x & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(x) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sen} 2x \\ \operatorname{sen} 2x & 1 \end{pmatrix}$$

b. $A(x) \cdot A(x) = A(x)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sen} 2x \\ \operatorname{sen} 2x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 & \text{I} \\ \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} x & \text{II} \end{cases}$$

Substituindo I em II, temos:

$$2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot 1 = \operatorname{sen} x$$

$$2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 0$$

Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem as equações $\cos x = 1$ e $\operatorname{sen} x = 0$ são $x = 0$ ou $x = 2\pi$

Resposta: $x = 0$ ou $x = 2\pi$

05. Alternativa d

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & d & 1 \\ c & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2ad + bc = 2 \cdot (bc) + bc = 3bc$$

06. Alternativa e

Para que $A \cdot B$ seja uma matriz inversível temos que ter $\det(A \cdot B) \neq 0$.

Pelo teorema de Binet, temos: $\det A \cdot \det B \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 3^a & -1 \\ -1 & 3^a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7^{a-1} & 8^{a-3} \\ 7 & 2^{-3} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(3^{2a} - 1) \cdot (7^{a-1} \cdot 2^{-3} - 7 \cdot 8^{a-3}) \neq 0$$

$$3^{2a} \neq 0 \quad \text{e} \quad 7^{a-1} \cdot 2^{-3} - 7 \cdot 8^{a-3} \neq 0$$

$$3^{2a} \neq 1 \quad 7^{a-1} \cdot 2^{-3} \neq 7 \cdot 8^{a-3}$$

$$\begin{aligned}
a \neq 0 \quad & \frac{7^a}{7} \cdot \frac{1}{8} \neq 7 \cdot \frac{8^a}{8^3} \\
& \frac{7^a \cdot 8^2}{7 \cdot 8} \neq \frac{7^2 \cdot 8^a}{7 \cdot 8^3} \\
& \frac{7^a}{8^a} \neq \frac{7^2}{8^2} \\
& \left(\frac{7}{8}\right)^a \neq \left(\frac{7}{8}\right)^2 \\
& a \neq 2
\end{aligned}$$

Como $a \neq 0$ e $a \neq 2$ a resposta correta é $a^2 - 2a \neq 0$.

07. A afirmação verdadeira é a **c**, pois $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(B \cdot A)$ pelo Teorema de Binet.

As outras afirmações são falsas, veja os exemplos:

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$ A é não nula mas A não possui inversa.

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^t = \left[\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^t \neq A^t \cdot B^t \Rightarrow (A \cdot B)^t \neq A^t \cdot B^t$

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A^2 = \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} = 4$

$2 \cdot \det A = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) = -4 \Rightarrow \det A^2 \neq 2 \cdot \det A$

e. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + B) \cdot (A - B) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & -12 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}$

$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -2 \\ -6 & -22 \end{pmatrix}$

$(A + B) \cdot (A - B) \neq A^2 - B^2$