

Índice

Trigonometria

Resumo Teórico	1
Exercícios	4
Dicas	5
Resoluções	6



Trigonometria

Resumo Teórico

Função Seno e Cosseno

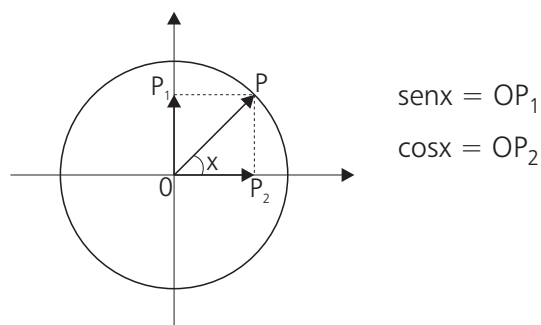


Gráfico de $y = \text{sen } x$

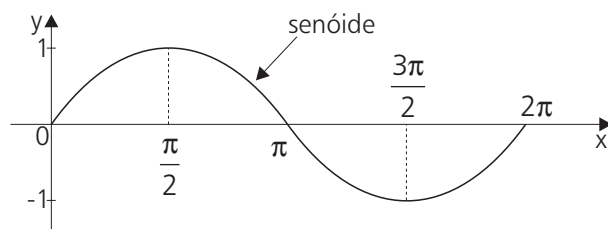
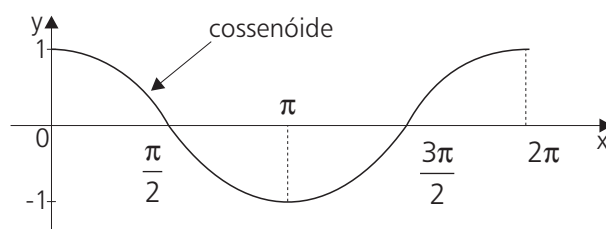


Gráfico de $y = \text{cos } x$



Relações Fundamentais

Relações Fundamentais

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

$$\text{cotg } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x} (x \neq k\pi)$$

$$\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

$$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x} (x \neq k\pi)$$

Conseqüências $\left(x \neq \frac{k\pi}{2} \right)$

$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$$

$$1 + \text{tg}^2 x = \text{sec}^2 x$$

$$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$$

$$\text{cos}^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$$

Tabela

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
senx	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosx	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgx	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Adição de Arcos

Fórmula de Adição

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{cotg}(a + b) = \frac{\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} a}$$

$$\operatorname{cotg}(a - b) = \frac{\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b + 1}{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a}$$

Fórmulas de Multiplicação

a. Arcos duplos

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ \text{ou} \\ 2\cos^2 a - 1 \\ \text{ou} \\ 1 - 2\sin^2 a \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

b. Arcos Triplos

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$$

Fórmulas de Divisão

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Tangente do Arco Metade

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Fórmulas de Transformação em Produto

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

Equações Trigonométricas Fundamentais

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta \Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi \text{ ou } \alpha = (\pi - \beta) + 2k\pi$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \pm \beta + 2k\pi$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$$

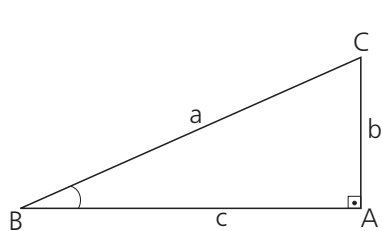
Funções Circulares Inversas

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \operatorname{arc} \cos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ e } 0 \leq y \leq \pi$$

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Triângulo Retângulo: Relações Trigonômicas



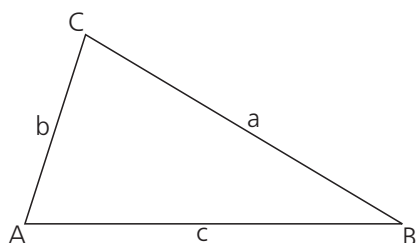
$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \hat{B} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c}$$

Triângulo Qualquer

Lei dos Cossenos

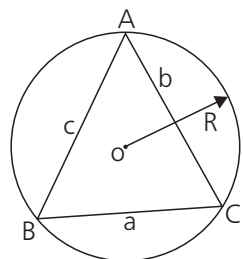


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\text{cos } \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\text{cos } \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\text{cos } \hat{C}$$

Lei dos Senos



$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

Exercícios

01. Os números reais $\text{sen } \frac{\pi}{12}$, $\text{sen } a$ e $\text{sen } \frac{5\pi}{12}$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então o valor de $\text{sen } a$ é:

a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

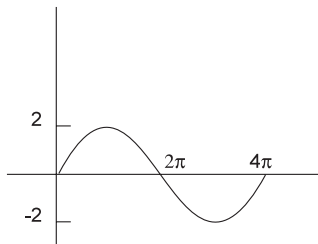
c. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

d. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

e. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

02. A figura abaixo mostra parte do gráfico da função:

- a. $\text{sen } x$
- b. $2\text{sen} \frac{x}{2}$
- c. $2 \text{sen } x$
- d. $2 \text{sen } 2x$
- e. $\text{sen } 2x$



03. Dentre os números abaixo, o mais próximo de $\text{sen } 50^\circ$ é:

- a. 0,2
- b. 0,4
- c. 0,6
- d. 0,8
- e. 1,0

04. O menor valor de $\frac{1}{3 - \cos x}$, com x real, é

- a. $\frac{1}{6}$
- b. $\frac{1}{4}$
- c. $\frac{1}{2}$
- d. 1
- e. 3

05. O valor de $(\text{tg } 10^\circ + \text{cotg } 10^\circ) \text{sen } 20^\circ$ é

- a. $\frac{1}{2}$
- b. 1
- c. 2
- d. $\frac{5}{2}$
- e. 4

06. Sabe-se que um dos ângulos internos de um triângulo mede 120° . Se os outros dois ângulos, x e y são tais que $\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, a diferença entre as medidas de x e y é:

- a. 5°
- b. 15°
- c. 20°
- d. 25°
- e. 30°

07. O número de raízes da equação $\cos 2x - \text{sen } x = 0$ no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ é

- a. 4
- b. 3
- c. 2
- d. 1
- e. 0

Dicas

01. Observe que na P.A. (a_1, a_2, a_3) , o termo médio $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$. A seguir, transforme a soma $a_1 + a_3$ em produto, utilizando a fórmula:

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

02. O período da função $y = b \cdot \text{sen } cx$ ($b, c > 0$) é dado por $p = \frac{2\pi}{c}$

03. Comparar $\text{sen } 50^\circ$ com $\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sabendo que no 1.º Quadrante a função seno é crescente.

04. Sendo $-1 \leq \cos x \leq 1$, basta atribuir a **cos x** os valores 1 e -1.

05. Lembrar que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$ e $\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$.

06. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , temos que $x + y + 120^\circ = 180^\circ$ ou $x = 60^\circ - y$. Substituindo x na equação dada, obtemos y utilizando a fórmula **$\operatorname{cos}(a - b) = \operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$** .

- 07.
1. Na equação dada, substitua $\operatorname{cos} 2x$ por $1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$ (ver página 2).
 2. Calcule os valores de $\operatorname{sen} x$.
 3. Resolva a equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ sabendo que:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \Rightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = (\pi - a) + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Resoluções

01. Alternativa d.

Na P.A. $\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{12}, \operatorname{sen} a, \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}\right)$ temos:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}}{2}$$

$$2 \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$$

Como $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{p-q}{2}$, vem:

$$2 \operatorname{sen} a = 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left(\frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} \right)$$

$$2 \operatorname{sen} a = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cos} \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} a = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

02. Alternativa b.

A função $y = b \cdot \sin cx$ ($b, c > 0$) tem período $p = \frac{2\pi}{c}$ e imagem $Im = [-b, b]$.

Analisando o gráfico, concluímos que $p = 4\pi$ e $b = 2$.

$$\text{De } \frac{2\pi}{c} = 4\pi \text{ vem } c = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Logo, a função é } y = 2 \cdot \sin \frac{x}{2}$$

03. Alternativa d.

No 1.º quadrante, a função seno é crescente. Então $\sin 45^\circ < \sin 50^\circ < \sin 60^\circ$.

$$\text{Sendo } \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,71 \text{ e } \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,87, \text{ temos: } 0,71 < \sin 50^\circ < 0,87.$$

Logo, entre as alternativas, o número mais próximo de $\sin 50^\circ$ é 0,8.

04. Alternativa b.

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, vem:

$$\text{se } \cos x = 1, \text{ temos: } \frac{1}{3 - \cos x} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{se } \cos x = -1 \text{ temos } \frac{1}{3 - \cos x} = \frac{1}{3 - (-1)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Logo, o menor valor é } \frac{1}{4}.$$

05. Alternativa c.

$$\text{Sabendo que } \operatorname{tg} 10^\circ = \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}, \operatorname{cotg} 10^\circ = \frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} \text{ e}$$

$$\sin 20^\circ = \sin 2 \cdot (10^\circ) = 2 \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ \text{ vem:}$$

$$(\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{cotg} 10^\circ) \cdot \sin 20^\circ = \left(\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} + \frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} \right) \cdot \sin 20^\circ =$$

$$= \left(\frac{\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ}{\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} \right) \cdot \sin 20^\circ = \frac{1}{\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} \cdot 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ = 2$$

06. Alternativa e.

Temos $x + y + 120^\circ = 180^\circ$, então $x = 60^\circ - y$ (1) substituindo (1) em

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \text{ vem: } \frac{\cos(60^\circ - y)}{\cos y} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\cos 60^\circ \cdot \cos y + \sin 60^\circ \sin y}{\cos y} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\cos 60^\circ \cdot \cancel{\cos y}}{\cancel{\cos y}} + \frac{\sin 60^\circ \sin y}{\cos y} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tgy} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tgy} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tgy} = 1 \Rightarrow y = 45^\circ$$

$$\text{Logo } x = 60^\circ - 45^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

Como as alternativas são todas positivas, temos a diferença

$$y - x = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

07. Alternativa b.

$$\cos 2x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x = 0$$

$$-2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + 1 = 0 \quad (-1) \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm 3}{4} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x = -1 \end{array} \right. \text{ou}$$

$$(1) \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$(2) \operatorname{sen} x = -1 = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Como $0 \leq x \leq 2\pi$, obtemos as soluções: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$

Logo, o número de raízes é 3.