Índice

Progressão Aritmética e Geométrica

Progressão Aritmética e Geométrica

Resumo teórico

Progressão Aritmética (P.A.)

Definição

Uma seqüência numérica (a_1; a_2; a_3;....; a_{n-1}; a_n; a_{n+1};...) será denominada P.A. se um termo qualquer (a_n), a partir do segundo (a_2) for obtido pela soma do termo imediatamente anterior (a_{n-1}) com um valor constante (r) denominado **razão da P.A.**; ou seja, numa P.A.:

$a_n = a_{n-1} + r$ para $n \in IN / n \geq 2$

Exemplo: (1,3,5,7,9,....) seqüência dos números ímpares positivos é uma P.A. de razão $r = 2$ e primeiro termo $a_1 = 1$

Conseqüências:

1. A diferença entre dois termos consecutivos é constante e igual à razão da P.A., ou seja:

   $a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1} = r$

2. Um termo qualquer, a partir do segundo, é a média aritmética dos termos que lhe são eqüidistantes, ou seja:

   $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$; $a_{10} = \dfrac{a_7 + a_{13}}{2}$; $a_n = \dfrac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}$

Fórmula do Termo Geral da P.A. (a_n)

Numa P.A. de razão r e primeiro termo a_1 , podemos obter um termo qualquer a_n através da seguinte relação:

$a_n = a_1 + (n - 1).r$ para $n \in IN / n \geq 1$

Exemplo: para encontrarmos o 10º termo fazemos $n = 10$, logo: $a_{10} = a_1 + 9.r$

Conseqüência:

1. Para obtermos um termo qualquer a_n, a partir de um termo de ordem p (a_p) devemos fazer:

   $a_n = a_p + (n - p).r$

   Exemplo: $a_{10} = a_7 + 3r$ ou $a_{10} = a_4 + 6r$, etc...

Soma dos Termos de uma P.A.

A soma dos n primeiros termos de uma P.A. pode ser obtida pela seguinte relação:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

onde a_1 é o primeiro termo,

a_n é o último termo,

n é o n.o de termos somados e

S é o valor da soma dos termos.

Progressão Geométrica (P.G.)

Definição

Uma seqüência numérica (a_1; a_2; a_3;....; a_{n-1}; a_n; a_{n+1};...) será denominada P.G. se um termo qualquer (a_n), a partir do segundo (a_2) for obtido pela multiplicação do termo imediatamente anterior (a_{n-1}) por uma constante numérica (q) denominada **razão da P.G.**; ou seja, numa P.G.:

$a_n = a_{n-1} \cdot q$ para $n \in IN / n \geq 2$

Exemplo: (2, 6, 18, 54, 162) é uma P.G. onde q=3

Conseqüências:

1. O quociente entre dois termos consecutivos é constante e é igual à razão (q) da P.G., ou ainda:

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \qquad \text{(para } q \neq 0\text{)}$$

2. Um termo qualquer, a partir do segundo (a_2) é a média geométrica dos termos que lhe são eqüidistantes, ou:

$$(a_3)^2 = a_2 \cdot a_4 \quad \text{ou} \quad (a_n)^2 = a_{n-p} \cdot a_{n+p}$$

Fórmula do Termo Geral da P.G. (a_n)

Numa P.G. de primeiro termo a_1 e razão q, um termo qualquer pode ser obtido através da seguinte relação:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ para $n \in IN / n \geq 1$

Exemplo: para obtermos o quinto termo fazemos n=5, daí: $a_5=a_1.q^4$

Conseqüência: Para obtermos um termo qualquer (a_n) a partir de um termo de ordem p devemos usar a seguinte relação:

$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$

Exemplo: $a_{10} = a_7 \cdot q^3$ ou $a_{10}=a_6 \cdot q^4$, etc...

Soma Finita de Termos de uma P.G.

A soma dos **n** primeiros termos de uma P.G. é dada pela seguinte relação:

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Soma Infinita de Termos de uma P.G. Convergente

Quando a soma infinita converge, ou seja, na P.G. $|q| < 1$, podemos obter o **limite** da soma fazendo

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Produto dos n Primeiros Termos de uma PG.

É dado pelas seguintes relações:

$$IP = a_1{}^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad \text{ou} \qquad IP = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}}$$

Exercícios

01. (FUV-83-Modificado) Calculando um dos ângulos de um triângulo retângulo, sabendo que os mesmos estão em P.G. obtemos:

a. $(\sqrt{2} - 1).90^o$ b. $(\sqrt{3} - 1).45^o$ c. $(\sqrt{5} - 1).45^o$ d. $(\sqrt{7} - 1).90^o$ e. $(2+\sqrt{2}).45^o$

02. (FUV-85-Modificado) Os números x, $\sqrt{x}$, $\log_2 10x$ são, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica. Calculando o valor de x obtemos:

a. $\frac{1}{2}$ b. 2 c. 5 d. $\frac{1}{5}$ e. $\frac{1}{3}$

03. (FUV-92-Modificado) Três números distintos formam uma P.A. crescente, cuja soma é três. Seus quadrados, mantendo a respectiva ordem, formam uma P.G.. Qual é a razão da P.A.?

a. 1 b. 2 c. $\sqrt{2}$ d. $\sqrt{3}$ e. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

04. Em uma progressão aritmética de termos positivos, os três primeiros termos são $1 - a$, $- a$, $\sqrt{11 - a}$. O quarto termo desta P.A. é:

a. 2 b. 3 c. 4 d. 5 e. 6

05. A seqüência de números reais a, b, c, d forma, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma dos termos é 110; a seqüência de números reais a, b, e, f forma, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2. A soma d + f é igual a:

a. 96 b.102 c. 120 d. 132 e. 142

06. Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por 0,3 : 0,03 : 0,003 : ... é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale

a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{2}{3}$ c. 1 d. 2 e. $\frac{1}{2}$

07. Para todo n natural não nulo, sejam as sequências

$(3, 5, 7, 9, ..., a_n, ...)$

$(3, 6, 9, 12, ..., b_n, ...)$

$(c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ...)$

com $c_n = a_n + b_n$. Nessas condições, c_{20} é igual a

a. 25 b. 37 c. 101 d. 119 e. 149

Dicas

01. Use a P.G. de 3 termos (x, xq, xq^2)

Num triângulo retângulo o maior ângulo mede 90º

(faça x = 90º, acima, e note que $q < 1$)

Faça a soma dos termos acima igual a 180º (soma dos ângulos internos num triângulo).

02. Numa P.G. (a_1, a_2, a_3): $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$

Lembre-se das condições de existência para os valores de x

03. Use a P.A. de três termos $(\underbrace{x-r}_{a_1}, \underbrace{x}_{a_2}, \underbrace{x+r}_{a_3})$

Pelo enunciado $(a_1{}^2; a_2{}^2; a_3{}^2)$ é P.G., então: $\frac{a_3^2}{a_2^2} = \frac{a_2^2}{a_1^2}$

Se a P.A. é crescente, então $r > 0$

Calcule a razão, fazendo $r = a_2 - a_1$, (por exemplo)

04. Dados três termos consecutivos de uma P.A., o termo do meio é igual à média aritmética dos outros dois, ou seja, se (a, b, c) é P.A., então $b = \frac{a+c}{2}$.

05. Numa PA qualquer $a_n - a_{n-1} = r$, onde r é a razão da PA

Numa PG qualquer $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$, onde q é a razão da PG

06.

1. A soma dos termos de uma P.G. infinita é dada por $S = \frac{a_1}{1-q}$, $-1 < q < 1$

2. Para três termos em P.A. vale a propriedade: "o termo do meio é a média aritmética dos outros dois".

07. A primeira seqüência dada é uma P.A. de razão 2 e a segunda seqüência dada é uma P.A. de razão 3.

O termo geral de uma P.A. é dado pela fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

Resoluções

01. Alternativa c.

Usando a P.G. de 3 termos: (x, xq, xq^2) faremos $x = 90^o$; então as medidas serão $(90^o, 90^oq, 90^oq^2)$ onde $0 < q < 1$, pois o maior ângulo no triângulo retângulo mede 90^o.

Mas: $90^o + 90^oq + 90^oq^2 = 180^o$ (Soma dos ângulos no triângulo)

daí $q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $q = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (não convém)

Logo, os ângulos medirão:

$(90^o; 45^o(\sqrt{5} - 1), 45^o(3 - \sqrt{5})$

02. Alternativa d.

Se $(x, \sqrt{x}, \log_2 10x)$ é P.G., então:

$$\frac{\log_2 10x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \Rightarrow x \cdot \log_2 10x = (\sqrt{x})^2$$

$\Rightarrow x \cdot \log_2 10x = |x|$, mas $|x| = x$ pois $x > 0$ (condição de existência)

$\Rightarrow x \cdot \log_2 10x = x$

$\Rightarrow \log_2 10x = 1 \Rightarrow 10x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

03. Alternativa c.

Usando a P.A. de três termos $(x - r, x, x + r)$ teremos:

$x - r + x + x + r = 3$ (enunciado),

onde $x = 1$

Logo, a P.A. fica $(1 - r, 1, 1 + r)$

mas $((1-r)^2, 1, (1+r)^2)$ é P.G. (enunciado)

daí $\frac{1}{(1-r)^2} = \frac{(1+r)^2}{1} \Rightarrow (1+r)^2 \cdot (1-r)^2 = 1$

$\Rightarrow (1 - r^2)^2 = 1$, logo $\begin{cases} r = 0, \text{ou} \\ r = \sqrt{2}, \text{ou} \\ r = -\sqrt{2} \end{cases}$

então $r = \sqrt{2}$ ou $r = -\sqrt{2}$

04. Alternativa b.

Como $(1 - a, -a, \sqrt{11-a})$ é uma P.A., temos:

$$-a = \frac{(1-a)+\sqrt{11-a}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2a = 1 - a + \sqrt{11-a} \;\Rightarrow\; -a - 1 = \sqrt{11-a}$ (*)

Elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$a^2 + 2a + 1 = 11 - a \Rightarrow a^2 + 3a - 10 = 0 \begin{cases} a' = 2 \\ a'' = -5 \end{cases}$

Como elevamos ao quadrado, temos que fazer a verificação dos valores encontrados na equação (*).

Para $a = 2$, temos: $-2 - 1 = \sqrt{11-2}$ (falso)

Para $a = -5$, temos: $+5 - 1 = \sqrt{11+5}$ (verdadeiro)

Como $a = -5$, a P.A. fica (6, 5, 4). O quarto termo será 3.

05. Alternativa d.

Seja (a, b, c, d) uma PA de razão $r \Rightarrow b - a = r$ (I)

Seja (a, b, e, f) uma PG de razão $q = 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow b = 2a$ (II)

Substituindo II em I, temos $2a - a = r \;\Rightarrow\; r = a$

Assim sendo a PA poderá ser escrita como (a, 2a, 3a, 4a), cuja soma dos termos é igual a 110.

$a + 2a + 3a + 4a = 110 \;\Rightarrow\; 10a = 110 \;\Rightarrow\; a = 11$

A PG fica com primeiro termo $a = 11$ e razão $q = 2$ e pode ser escrita como

(11, 22, 44, 88). Assim $d + f = 44 + 88 = 132$

a b d f

06. Alternativa c.

A soma dos termos da PG infinita (0,3 ; 0,03 ; 0,003 ; ...) é dada por $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}3}{1-0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}$

Uma PA de três termos com termo médio x e razão r pode ser escrita como $(x - r, x, x + r)$.

Sabendo que $x = \frac{1}{3}$, temos a PA $\left(\frac{1}{3} - r, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + r\right)$ então a soma de seus termos vale

$$\frac{1}{3} - r + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + r = \frac{3}{3} = 1$$

07. Alternativa c.

A sequência (3, 5, 7, 9, ... a_n, ...) é uma PA de razão 2, então

$a_n = a_1 + (n - 1) . r \Rightarrow a_n = 3 + (n - 1) . 2$

A sequência (3, 6, 9, 12, ... b_n, ...) é uma PA de razão 3, então

$b_n = b_1 + (n - 1) . r \Rightarrow b_n = 3 + (n - 1) . 3$

Como $c_n = a_n + b_n$

$c_{20} = a_{20} + b_{20}$

$c_{20} = [3 + (20 - 1) . 2] + [3 + (20 - 1) . 3]$

$c_{20} = 101$