Índice

Função Exponencial e Logaritmos

Função Exponencial e Logaritmos

Resumo Teórico

Potência

Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:

Def.: $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \end{cases}$

Consequência: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{n vezes}}$

Propriedades das Potências

P1: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

P3: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

P4: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

P5: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

Obs. 1: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$

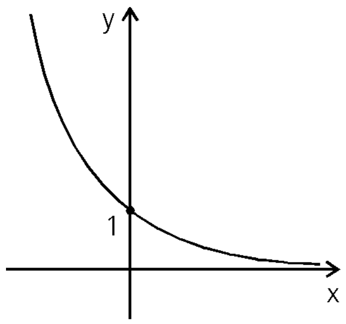
Obs. 2: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad (n \in \mathbb{N}^* \text{ e } a^m \geq 0)$

Função Exponencial

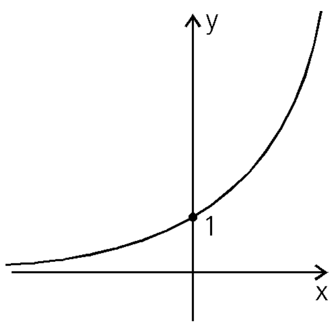
É toda função da forma $y = a^x$ com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Gráficos da Função Exponencial

$0 < a < 1$ (função decrescente)



$a > 1$ (função crescente)



Equação Exponencial

Propriedade: Se $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Inequação Exponencial

Se $0 < a < 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

inverte o sentido ($0 <$ base < 1)

Se $a > 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

mantém o sentido (base > 1)

Função Logarítmica

Sendo $x \in \mathbb{R} / x > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ e $1 \neq a > 0$ então:

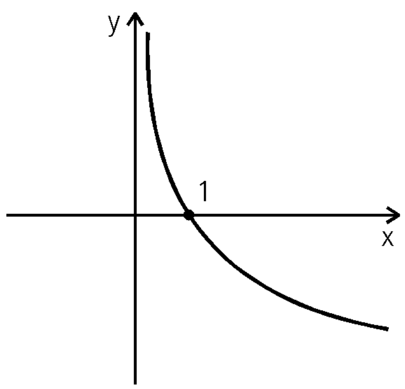
$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$

Obs.: Condição de Existência

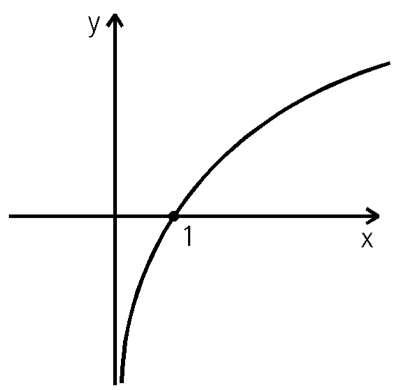
Se $y = \log_a x \Rightarrow$ C. E. $\begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$

Gráficos da Função Logarítmica

$0 < a < 1$ (função decrescente)



$a > 1$ (função crescente)



Propriedade dos logaritmos

P1: $\log_a (b \, . \, c) = \log_a b + \log_a c$

P2: $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

P3: $\log_a b^n = n \log_a b$

P4: $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$

Fórmula de mudança de base: $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

Equação Logarítmica

1.o Tipo: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
2.o Tipo: $\log_a f(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x) = a^{\alpha} \ (\alpha \in \mathbb{R})$

Obs.: Ao resolver as equações logarítmicas, é necessário verificar as condições de existência da equação inicial.

Inequação Logarítmica

1.o Tipo: $\log < \log$

Se $0 < a < 1$

$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

inverte o sentido ($0 < \text{base} < 1$)

Se $a > 1$

$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

mantém o sentido ($\text{base} > 1$)

2.o Tipo: $\log < \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$

Se $0 < a < 1$

$\log_a f(x) < \alpha \Leftrightarrow f(x) > a^{\alpha}$

inverte o sentido ($0 < \text{base} < 1$)

Se $a > 1$

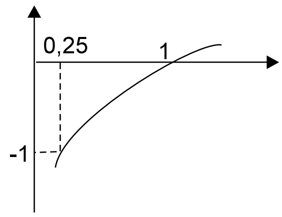
$\log_a f(x) < \alpha \Leftrightarrow f(x) < a^{\alpha}$

mantém o sentido ($\text{base} > 1$)

Obs.: Ao resolver as inequações logarítmicas, é necessário verificar as condições de existência da inequação inicial.

Exercícios

01. A figura ao lado mostra o gráfico da função logaritmo na base b.
O valor de b é:



a. $\frac{1}{4}$
b. 2
c. 3
d. 4
e. 10

02. O número $x > 1$ tal que $\log_x 2 = \log_4 x$ é:

a. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b. $2^{\sqrt{2}}$ c. $\sqrt{2}$ d. $2\sqrt{2}$ e. $4^{\sqrt{2}}$

03. O número real x que satisfaz a equação $\log_2 (12 - 2^x) = 2x$ é

a. $\log_2 5$ b. $\log_2 \sqrt{3}$ c. 2 d. $\log_2 \sqrt{5}$ e. $\log_2 3$

04. Em que base o logaritmo de um número natural n, $n > 1$, coincide com o próprio número n?

a. n^n b. $\frac{1}{n}$ c. n^2 d. n e. $n^{\frac{1}{n}}$

05. Considere a função f, definida por $f(x)= \log_a x$. Se $f(a) = b$ e $f(a+2) = b + 1$, os valores respectivos de a e b são:

a. 2 e 1 b. 2 e 2 c. 3 e 1 d. 3 e 2 e. 4 e 1

06. O mais amplo domínio real da função dada por $f(x) = \sqrt{\log_3 (2x-1)}$ é

a. $\left\{x \in IR \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$
b. $\left\{x \in IR \mid x > \frac{1}{2}\right\}$
c. $\left\{x \in IR \mid \frac{1}{2} < x \leq 1\right\}$
d. $\{x \in IR \mid x \geq 1\}$
e. $\{x \in IR \mid x \neq 1\}$

07. Se o par ordenado (a; b) é a solução do sistema $\begin{cases} \sqrt{2^{x+y}} = 2^y \\ \log_{10}(3x+4) = 1 + \log_{10}(y-1) \end{cases}$, então $a \cdot b$ é igual a

a. 2 b. 4 c. 6 d. 8 e. 9

Dicas

01. Observando o gráfico, vemos que para $x = 0{,}25$ temos $y = -1$. Substituindo x e y em $y = \log_b x$, obtemos b.

02. Resolver a equação na base 2, utilizando a propriedade de mudança de base:

$$\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad (b > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1,\ c > 0 \text{ e } c \neq 1)$$

03. Devemos ter $12 - 2^x > 0$ (condição de existência). Para resolver a equação, use a definição de logaritmo ($\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$) e substitua 2^x por y.

04. É dado no enunciado que $\log_x n = n$ ($0 < x \neq 1$ e $n > 1$). Para obter a base x, aplique a definição de logaritmo.

05. Como $f(x) = \log_a(x)$, $f(a) = b$ e $f(a + 2) = b + 1$, trocando-se **x** por **a** e por **a + 2**, obtemos os valores de **a** e **b**.

06.

1. Para determinar o domínio de $f(x) = \sqrt{\log_3(2x - 1)}$, devemos ter $\log_3(2x - 1) \geq 0$.
2. Para resolver a inequação logarítmica, basta notarmos que são equivalentes as inequações:
   $\log_a f(x) \geq c \Leftrightarrow \log_a f(x) \geq c \cdot \log_a a \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \log_a f(x) \geq \log_a a^c \Leftrightarrow f(x) \geq a^c$ se $a > 1$ e $c \in \mathbb{R}$

07.

1. Obtenha uma relação entre x e y na 1.a equação do sistema, lembrando que
   $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$) e $a^b = a^c \Leftrightarrow$
   $b = c$ ($0 < a \neq 1$).
2. Na 2.a equação do sistema, use a propriedade do logaritmo do produto:
   $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ e a consequência da definição:
   $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$ ($0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$).
3. Resolva o sistema obtido, equivalente ao sistema dado.

Resoluções

01. Alternativa d.

Do gráfico, temos: $x = 0{,}25$ e $y = -1$.

Sendo $y = \log_b x$, vem: $-1 = \log_b 0{,}25 \Rightarrow -1 = \log_b \frac{1}{4} \Rightarrow b^{-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = 4$

02. Alternativa b.

$\log_x 2 = \log_4 x$

Aplicando a propriedade de mudança de base:

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(b > 0,\ a > 0$ e $a \neq 1,\ c > 0$ e $c \neq 1)$ temos: $\frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{\log_2 x}{\log_2 4}$

Como $\log_2 2 = 1$ e $\log_2 4 = 2$ vem: $\frac{1}{\log_2 x} = \frac{\log_2 x}{2}$

$$(\log_2 x)^2 = 2$$

$$\log_2 x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ \log_2 x = -\sqrt{2} \text{(não serve pois } x > 1) \end{cases}$$

De $\log_2 x = \sqrt{2}$ obtemos, pela definição de logaritmo, que $x = 2^{\sqrt{2}}$

03. Alternativa e.

Devemos ter 12 – > 0 (condição de existência)

$\log_2 (12 - 2^x) = 2x \Leftrightarrow 2^{2x} = 12 - 2^x \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$

Seja $2^x = y$

$y^2 + y - 12 = 0$

$y = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow y = -4$ ou $y = 3$

Se $y = -4$ temos que $2^x = -4$ (não convém, pois $2^x > 0$ para todo x real)

Se $y = 3$ temos que $2^x = 3$, que satisfaz a condição $12 - 2^x > 0$.

Sendo $2^x = 3$, conclui-se que $x = \log_2 3$

04. Alternativa e.

Seja x a base procurada. É dado no enunciado que:

$\log_x n = n$ para $0 < x \neq 1$ e $n > 1$

Assim, $\log_x n = n \Leftrightarrow x^n = n \Leftrightarrow (x^n)^{\frac{1}{n}} = (n)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x = n^{\frac{1}{n}}$

05. Alternativa a.

$f(x) = \log_a(x)$

condições de existência $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ e \\ x > 0 \end{cases}$

Se $f(a) = b$, temos que $\log_a(a) = b \therefore b = 1$

Se $f(a + 2) = b + 1$, temos que $\log_a(a + 2) = 2 \therefore a^2 = a + 2$

$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow a = 2, a = -1$ (não serve)

Resposta: $a = 2$ e $b = 1$

06. Alternativa d.

$f(x) = \sqrt{\log_3(2x - 1)}$

Para que exista $f(x) \in IR$, devemos ter:

$\log_3(2x - 1) \geq 0$

$\log_3(2x - 1) \geq 0 \cdot \log_3 3 \Rightarrow \log_3(2x - 1) \geq \log_3 3^o$

$\log_3(2x - 1) \geq \log_3 1 \Rightarrow 2x - 1 \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$

Então: $D(f) = \{ x \in IR \mid x \geq 1\}$

07. Alternativa b.

$$\begin{cases} \sqrt{2^{x+y}} = 2^y & ① \\ \log_{10}(3x + 4) = \log_{10} 10 + \log_{10}(y - 1) & ② \end{cases}$$

① $2^{\frac{x+y}{2}} = 2^y \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{2} = y \Leftrightarrow x + y = 2y \Leftrightarrow x = y$

② $\log_{10}(3x + 4) = \log_{10}10(y - 1) \Leftrightarrow 3x + 4 = 10(y - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 4 = 10y - 10 \Leftrightarrow 3x = 10y - 14$

condição de existência: $10(y - 1) > 0 \Rightarrow y > 1$

Assim, o sistema dado é equivalente a: $\begin{cases} x = y \\ 3x = 10y - 14 \end{cases}$

$3x = 10x - 14 \Rightarrow -7x = -14 \Rightarrow x = 2$

Como $x = y$ temos que $y = 2$ (satisfaz a condição $y > 1$)

Logo, a solução do sistema $(a; b)$ é $(2; 2)$

Então: $a \cdot b = 2 \cdot 2 = 4$